

TEXTO DE APOIO n.º 1

Notas relativas à natureza da Geometria e a organização dos conceitos geométricos

Nelson Mestrinho
ESE de Santarém

INTRODUÇÃO

Quando falamos em Geometria não nos referimos apenas a um conjunto de conhecimentos relativos à forma e tamanho dos objetos e das posições destes no espaço, mas também a um modo de organizar os conceitos (geométricos) e as relações entre eles. Nos próximos parágrafos tentarei explicar em que consiste a Geometria entendida como sistema lógico-dedutivo, onde para além da evidência física, material, a «verdade matemática» decorre da construção argumentativa/demonstrativa baseada no tipo de estruturação que é próprio da Matemática. Começarei por marcar a distinção que existe entre os objetos geométricos e os objetos físicos com os quais costumam ser confundidos. De seguida tentarei explicar, de um modo geral, como funciona uma teoria matemática (neste caso, uma Geometria), ou seja, como se organizam os «factos» ou «verdades». Por último, apresentarei algumas ideias e conceitos fundamentais, acompanhados de algum vocabulário específico que se constituirá como base do léxico desta unidade curricular.

Na nossa primeira aula utilizámos folhas de papel para construir um «cubo». Seguramente já vimos «cubos» em diversos materiais, como madeira ou plástico, com vários tamanhos e com diferentes possibilidades de utilização decorativa ou utilitária. Ao segurarmos um desses «cubos», podemos perguntar: o que temos, de facto, na nossa mão? Em bom rigor, não seguramos um cubo, mas sim um objeto que tem a **forma** de cubo.

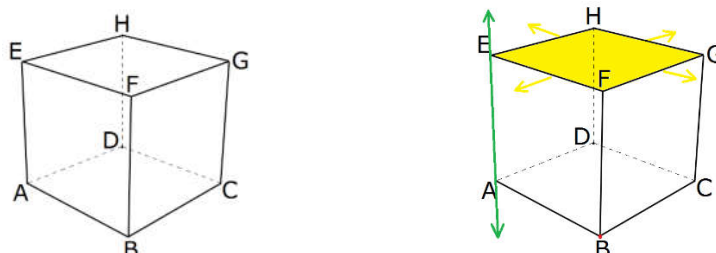


Acontece que o cubo NÃO EXISTE enquanto objeto físico! Trata-se de uma entidade matemática que existe apenas no «universo» da Geometria. Para nós, em termos físicos, o que retemos deles é a sua forma (e eventualmente algumas propriedades métricas relacionadas com

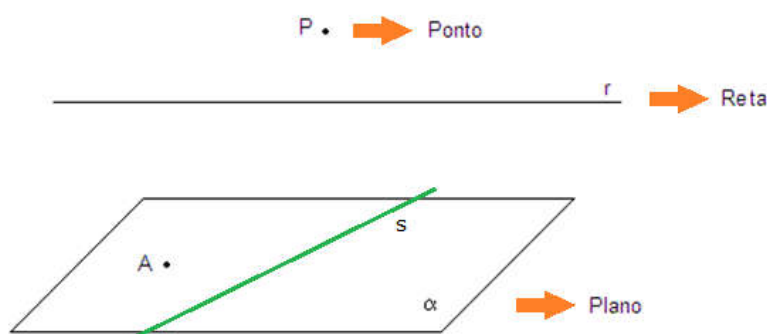
as suas dimensões). Um «cubo de madeira» (como aqueles que se encontram em conjuntos didáticos de sólidos geométricos) é um **modelo** de uma entidade que nós efetivamente não podemos ver! Um cubo tem propriedades (que o caracterizam) que são impossíveis de reproduzir com exatidão num modelo, do mesmo modo que um modelo em madeira de um cubo tem atributos que nada têm a ver com o cubo enquanto objeto geométrico (como a cor, a massa, a densidade, a textura, etc.). No entanto, encontramos no modelo aquilo que os nossos sentidos reconhecem como sendo representações fiéis dessas mesmas propriedades. O que caracteriza uma entidade geométrica não é a imagem mental que dela criámos a partir de objetos físicos que nos habituamos a ver como sendo o próprio ente matemático mas antes a forma como os seus elementos se relacionam entre si. Deste modo, um cubo não é um objeto de madeira ou papel mas antes um **conjunto de relações matemáticas entre os seus elementos**.

TERMOS PRIMITIVOS

A observação de um modelo de um cubo permite-nos apreender os seus componentes, como o são os vértices, as arestas e as faces. A partir destes é possível intuir aquelas que são entidades mais elementares para o estudo do espaço – os PONTOS, as RETAS e os PLANOS. Um vértice é o mais simples elemento do cubo que se pode individualizar; trata-se de um **ponto**. Apesar de não poder ser «visto», um ponto pode ser idealizado como sendo uma localização no espaço. Uma aresta do cubo é um **segmento de reta** cujas extremidades são dois vértices. Tal segmento define uma **reta** enquanto conjunto de todos os pontos que se encontram na mesma direção do segmento. As **retas** e os **planos** são conjuntos de pontos no espaço que se podem conceber intuitivamente a partir de realidades experimentais e que funcionam como modelos dessas mesmas realidades. Objetos concretos tais como um fio esticado ou a superfície do quadro branco constituem modelos para os conceitos abstratos de reta e plano, respetivamente. Tanto num caso como noutro essas realidades não correspondem exatamente à ideia de reta ou plano, sendo antes mais próximas da de segmento de reta (no primeiro caso) e de um domínio plano limitado (no segundo caso). A partir delas, considerando os seus prolongamentos ao longo das suas direções, podemos imaginar o que se entende por reta e por plano. As faces do cubo são partes limitadas de planos ou, dito de outra forma, uma face do cubo define um plano pelo seu prolongamento em todas as direções definidas pelas suas arestas (Machado, 2002).



Os conceitos de **ponto**, **reta** e **plano** são os objetos elementares do espaço geométrico e por isso, nesse contexto, designam-se por **termos primitivos** uma vez que não são passíveis de definição¹. Não nos interessa a sua natureza (o que são) mas antes a forma como se relacionam entre si, ou seja, as suas **relações de incidência**.



Representações de termos primitivos

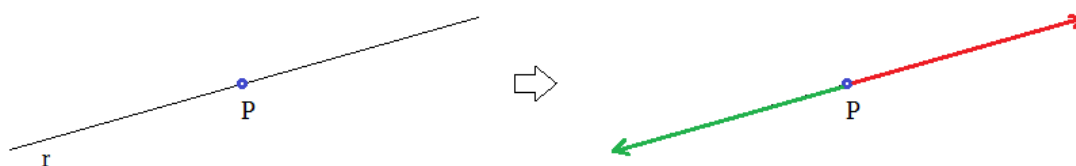
Desde logo, podemos distinguir **relações de determinação**, que envolvem o modo como se definem retas e planos a partir dos pontos, assim como as condições de pertença/inclusão entre termos primitivos e **relações de interseção**, que definem o modo como retas e planos se podem posicionar entre eles ou uns em relação aos outros (posições relativas de retas, de planos ou entre retas e planos), e que tratarei mais à frente. Da observação da figura anterior, é possível ver que a reta r não passa pelo ponto P (ou seja, P não é ponto de r ou, utilizando a linguagem de conjuntos, P não pertence a r); que A é um ponto de α e que a reta r incide (está contida) no plano α . Podemos traduzir alguns conceitos geométricos a partir de relações de incidência:

- Quando nos referimos a **pontos**, dizemos que eles são **colineares** se existir uma reta à qual todos eles pertencem;
- Quando nos referimos a **pontos**, a **retas** ou a **pontos e retas**, dizemos que eles são **complanares** se existir um plano ao qual todos eles pertencem;
- Duas **retas** são **paralelas** se forem complanares e não tiverem nenhum ponto em comum (não existir interseção).

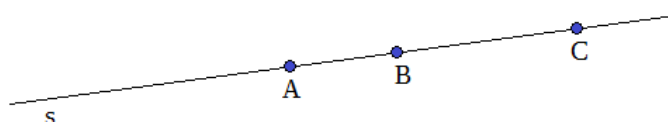
¹ As definições são fundamentais para a construção da Matemática, de modo que os termos (que designam conceitos) possuam significados que não deixem margem para ambiguidades. No entanto, para que se possam definir noções matemáticas a partir de outras é necessário chegar a um ponto em que haverá noções que teremos de assumir sem definição. Se assim não fosse, iniciariamos uma "descida" infinita ou então entrariamos num ciclo vicioso, "definindo" a partir daquilo que se pretende "definir" o que, numa perspetiva lógica, não seria aceitável. Assim, sem se fixar estas noções primitivas nenhuma definição fará sentido. Numa teoria matemática, as noções derivadas são definidas logicamente utilizando exclusivamente as noções primitivas estabelecidas (que não carecem de definição) ou outras derivadas, definidas previamente.

POSIÇÕES RELATIVAS DE PONTOS, RETAS, PLANOS, RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

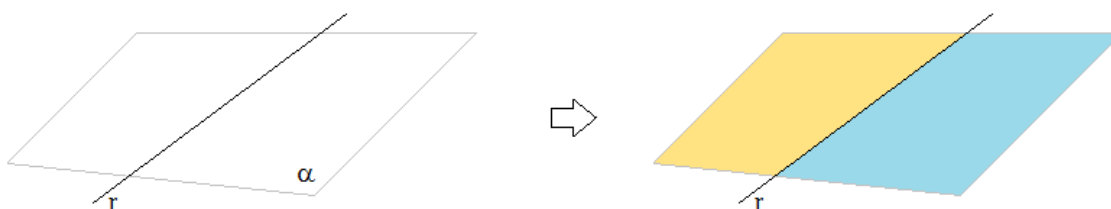
Comecemos por introduzir mais alguns conceitos envolvendo relações que se estabelecem entre termos primitivos, nomeadamente relações de separação. Qualquer ponto P pertencente a uma reta r divide-a em duas **semirretas** com a mesma origem e sentidos opostos. Assim, e deste modo, a cada reta e a cada ponto dessa reta estão associadas de forma biunívoca duas semirretas com a mesma origem, a mesma direção e sentidos opostos.



Sejam agora A , B e C três pontos colineares no espaço, e s a reta que passa por A , B e C . Dizemos que o ponto B **está entre** os pontos A e C se estes dois últimos pontos pertencerem a semirretas distintas definidas em s por B . Esta noção permite-nos também definir um **segmento de reta** $[EF]$ como sendo o conjunto dos pontos da reta EF que estão entre E e F .

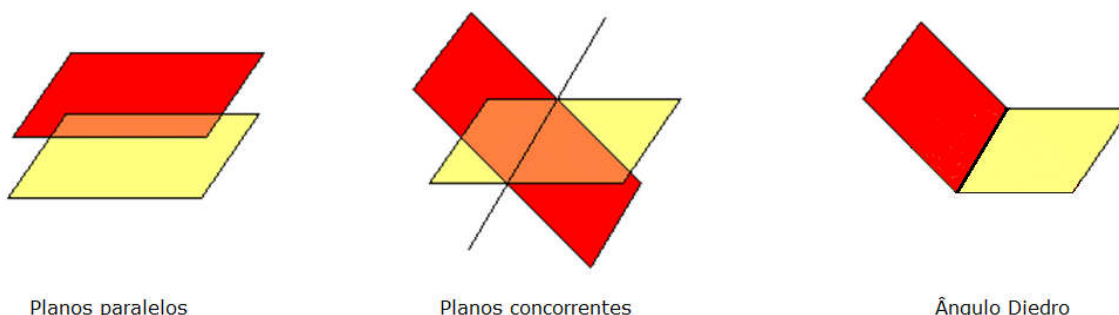


Do mesmo modo que um ponto pertencente a uma reta divide essa reta em duas semirretas com origem nesse ponto, também uma reta incidente num plano divide esse plano em dois **semiplanos**.



Dois planos no espaço podem ser paralelos, concorrentes ou coincidentes. Se forem **paralelos**, significa que não têm pontos em comum, não havendo pontos de intersecção. Se

forem **coincidentes**², significa que todos os pontos de ambos os planos são comuns. Se a interseção de dois planos for uma reta então estes planos serão **concorrentes**. Nestas condições, os planos definem quatro regiões do espaço, cada uma delas limitada por um par de semiplanos. A cada uma dessas regiões chama-se **ângulo diedro**.



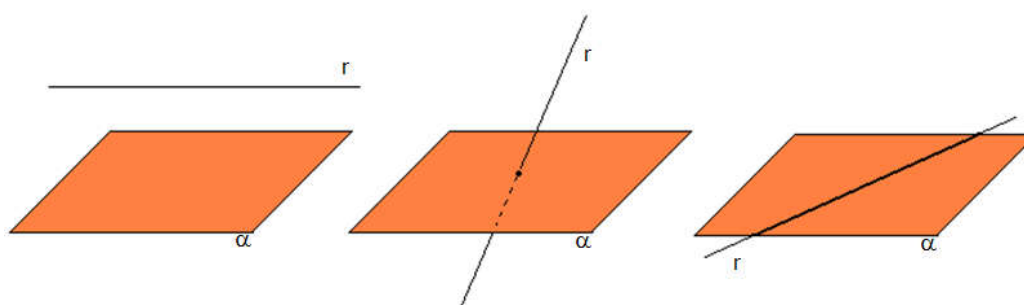
Planos paralelos

Planos concorrentes

Ângulo Diedro

No espaço, **duas retas** podem ser paralelas, coincidentes, concorrentes, ou ainda, não coplanares. São **paralelas** se forem coplanares e não tiverem quaisquer pontos em comum; são **coincidentes**, se todos os pontos de ambas as retas são comuns (vale também aqui a nota introduzida no parágrafo anterior). Se as retas se intersectarem num (único) ponto temos que as retas são **concorrentes** sendo este ponto comum o ponto de interseção das duas retas. Duas retas dizem-se **não coplanares** se não tiverem pontos em comum e se não existir um plano que as contenha (a ambas).

Relativamente às posições relativas de retas e planos, temos que uma reta pode ser paralela a um plano, concorrente com um plano ou incidente num plano. Será **paralela** a um plano se não tiver com este pontos em comum. É **concorrente** se tiver um ponto em comum com o plano (como se a reta «atravessasse» o plano) e é **incidente** num plano se todos os pontos que formam a reta forem também eles elementos do plano.



² É comum encontrar na literatura (por exemplo, em manuais escolares de Matemática do Ensino Secundário, mas não só) referência a planos coincidentes como sendo paralelos em sentido lato. Na abordagem à Geometria pela via analítica, com recurso à Álgebra de vetores, é bastante natural considerar a relação de coincidência como caso particular de paralelismo. No nosso caso, na nossa «arrumação» dos conceitos, parece-me mais adequado destacar a relação de paralelismo estrito, sem prejuízo para a possibilidade de haver outras formas de definir estas relações.

Para caracterizar um cubo necessitamos explicitar a forma como os seus elementos se relacionam entre si e da observação de um modelo bem construído conseguimos facilmente ter uma ideia das relações que são estabelecidas. Por exemplo,

- A superfície do cubo é formada por seis quadrados geometricamente iguais;³
- As faces do cubo são paralelas⁴ duas a duas, para qualquer face do cubo existe uma (que designamos sua oposta) que lhe é paralela;
- Para qualquer aresta do cubo existem três outras paralelas⁵ a esta; uma pertencente à mesma face e as restantes pertencentes à sua face oposta
- Em cada vértice do cubo concorrem três e apenas três arestas.

Deste modo, temos a necessidade de ter bem presente e de forma clara a forma como pontos, retas e planos se relacionam entre si. Estas relações de incidência de interseção permitem-nos ainda estabelecer uma nomenclatura adequada a este propósito.

A GEOMETRIA COMO TEORIA DEDUTIVA

Os alicerces de uma teoria geométrica integram a formulação de um conjunto de propriedades envolvendo os conceitos primitivos e as suas relações de incidência. Tradicionalmente, o grau de evidência permite-nos aceitar a validade de tais premissas sem que se sinta a necessidade de as demonstrar⁶. São estas proposições, que se designam por **axiomas**, que tornam possível a construção de uma geometria⁷ enquanto «edifício» lógico-dedutivo, uma vez que constituem os seus pressupostos, a partir dos quais se demonstram novas proposições. Assim, se os termos primitivos e as definições são os «tijolos» da teoria, os axiomas ditam as formas como esses «tijolos» se deverão associar. Na figura seguinte encontramos um esquema que resume esta ideia.

³ De um modo geral, duas figuras planas são geometricamente iguais (ou congruentes) se for possível, por sobreposição, fazê-las coincidir ponto por ponto. Mais adiante será melhor explicado este conceito.

⁴ Dizer que duas faces de um cubo são paralelas significa dizer que os planos que as suportam são planos paralelos. Disto não resulta qualquer ambiguidade uma vez que qualquer face do cubo define de forma unívoca um plano e é esse plano que se designa como plano de suporte da face em causa.

⁵ O conceito de arestas paralelas decorre do paralelismo de faces por analogia: Duas arestas são paralelas se as retas de suporte destas arestas forem elas paralelas.

⁶ Tradição à parte, nos dias de hoje, um axioma é entendido como uma proposição que se assume como sendo verdadeira sem demonstração, mesmo que traduza uma afirmação que vai contra a nossa intuição.

⁷ Decerto reparou na utilização do termo “de uma geometria” em vez de “da Geometria”. Aqui a palavra geometria designa não o ramo da Matemática que conhecemos por esse nome mas uma forma de “arrumar” os conceitos geométricos. Isto pressupõe que existem várias formas de proceder a essa “arrumação” e são as definições e os axiomas que determinam a forma como as entidades geométricas se relacionam entre si. Assim, conjuntos de axiomas (axiomáticas) diferentes podem dar origem a geometrias diferentes.

Proposições (demonstram-se a partir dos axiomas e outras proposições demonstradas anteriormente)	
Definições	Axiomas (proposições que se aceitam sem demonstração)
Termos Primitivos (não se definem)	

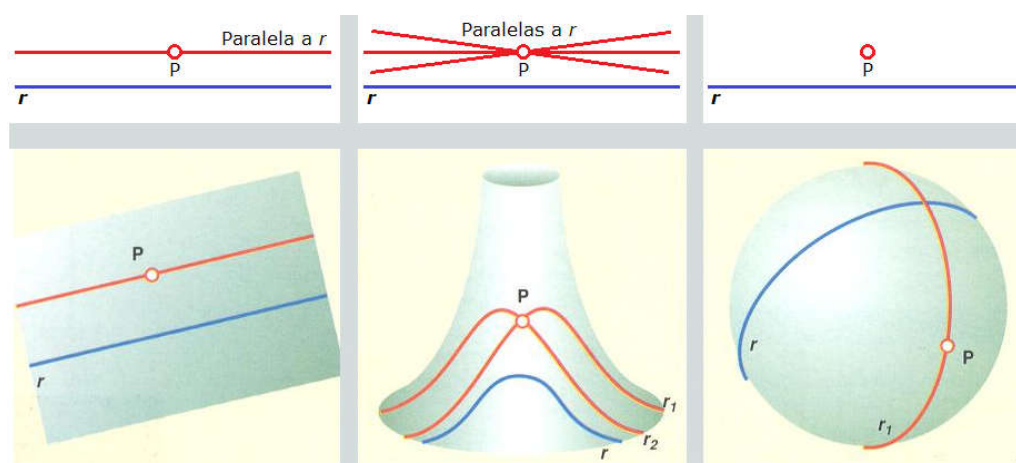
Apresenta-se de seguida um conjunto de proposições que costumam figurar nas axiomáticas para Geometria Euclidiana no Espaço. Alguns destes **axiomas** descrevem de forma precisa relações de incidência.

1. Por dois pontos distintos, A e B, passa uma e uma só reta (por eles definida) e que se representa por AB.
2. Dada uma reta, existem pontos que pertencem à reta e pontos que não lhe pertencem.
3. Por três pontos não colineares, C, D e E passa um, e um só plano (por eles definido) e que se representa por CDE.
4. Dado um plano, existem pontos que pertencem ao plano e pontos que não lhe pertencem.
5. Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.
6. Se uma reta tem dois dos seus pontos pertencentes a um plano, então todos os pontos da reta pertencem ao plano (nestas condições diz-se que a reta incide no plano).
7. Dados uma reta e um ponto exterior a ela, existe uma, e uma só, reta que passa pelo ponto e é paralela à primeira.

A última das afirmações do conjunto acima designa-se axioma das paralelas e a sua aceitação é o que caracteriza uma **geometria** como sendo **euclidiana**. Este axioma está na base da geometria no plano e no espaço que se estuda em todos os níveis do ensino básico e ensino secundário.

Brevíssima estória das geometrias não euclidianas...

A distinção entre geometria euclidiana e não euclidiana não existiu até ao século XIX. Foi Euclides que, há mais de 2300 anos, compilou todo o conhecimento matemático grego em 13 volumes da sua obra *Os Elementos*. Tornou-se uma das mais importantes e influentes obras da História da Humanidade e a mais difundida logo a seguir à Bíblia. Foi nas suas páginas, que chegaram até nós através das traduções em árabe, que pela primeira vez foi apresentado todo o conhecimento matemático (de então) organizado como teoria axiomática⁸. No livro I, onde são apresentados os axiomas que são a base de toda a teoria, encontramos uma outra formulação do que consta no ponto 7, em cima, e é conhecido como o **postulado das paralelas**. A sua evidência nunca foi consensual e durante muitos séculos tentou-se demonstrar o postulado das paralelas a partir dos restantes axiomas, porém, sem sucesso. Foi só no século XIX que, decorrente dos trabalhos dos matemáticos Bolyai, Lobachevsky e Riemann, se compreendeu que a Geometria era possível sem o postulado das paralelas e, mais ainda, substituindo-o por outros (de algum modo contrários a este e podendo até mesmo ser considerados «contraintuitivos» e pouco evidentes em alguns dos casos) se construíam geometrias onde se demonstravam (e por esse motivo seriam, nesses sistemas, verdades absolutas) propriedades surpreendentes.



Três modelos para três geometrias: no primeiro é válido o postulado das paralelas, nos outros dois o dito postulado é substituído por outro que estabelece uma relação de incidência diferente entre retas, pontos exteriores e paralelas. Isto dá origem a geometrias um pouco estranhas (para a nossa intuição) mas que têm dado à ciência novas formas de explicar aspetos do nosso mundo físico (Imagem obtida em Hernandez, 1996).

Apesar da importância que estas geometrias não-euclidianas tiveram no desenvolvimento da Geometria e até noutras áreas do conhecimento, a geometria euclidiana continua a ser a geometria «do mundo à escala humana».

⁸ O texto integral em inglês dos *Elementos* de Euclides encontra-se *on-line* em <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

MEDIR EM GEOMETRIA: O COMPRIMENTO

Apesar de não ser essencial para a construção de uma teoria geométrica, é útil poder dispor de uma forma de medir comprimentos de segmentos de reta, o que nos permite aproximarmos a Geometria das nossas experiências do dia-a-dia. A Geometria de Euclides é um exemplo de uma geometria sintética e «sem números». Não apresentava preocupações com a medida no mundo material mas, em vez disso, com relações exatas entre os seus elementos, relações essas que, pela sua natureza, eram puramente conceptuais (Johnston-Wilder e Mason, 2005). Se a uma geometria deste tipo juntarmos algumas noções relativas à medida, passamos a ter mais algumas ferramentas que nos ajudam a usar a Geometria para estudar a natureza das relações espaciais em contextos mais reais, mais próximos das nossas experiências quotidianas.

A primeira noção é a de distância. Dados dois pontos quaisquer do espaço, designemo-los por P e Q , a **distância entre P e Q** é um número $d(P,Q)$, verificando-se as seguintes propriedades:

- $d(P, Q) \geq 0$, para quaisquer pontos P e Q ;
- $d(P, Q) = 0$ se, e apenas se, P e Q forem o mesmo ponto ($P = Q$)
- $d(P, Q) = d(Q, P)$, para quaisquer pontos P e Q ;
- $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$, para quaisquer pontos P, Q e R .

Uma distância é, deste modo, uma função que a cada par de pontos no espaço faz corresponder um número real não negativo e que possui as propriedades enunciadas anteriormente. É possível agora definir o **comprimento** de um segmento de reta $[AB]$ como sendo

$$\overline{AB} = d(A, B).$$

Estas noções permitem-nos definir novos conceitos ou redefinir outros. Por exemplo,

- Considerando três pontos colineares A, B e C , podemos dizer que o ponto B está entre A e C se se verificar simultaneamente as condições $d(A, B) < d(A, C)$ e $d(B, C) < d(A, C)$;
- Dois **segmentos** de reta $[AB]$ e $[A'B']$ são **congruentes** se e apenas se $\overline{AB} = \overline{A'B'}$;
- Chamamos **ponto médio** do segmento $[AB]$ ao ponto $M \in [AB]$ tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$.

A noção de distância é também usada na definição de conjuntos de pontos que gozam de uma determinada propriedade (aquilo a que se chama «lugar geométrico» e que será tratado noutra oportunidade). Alguns dos mais conhecidos lugares geométricos são definidos recorrendo à noção de distância ou apenas à noção de invariância⁹ da distância.

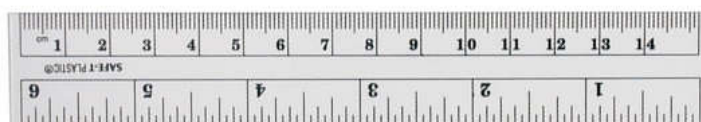
⁹ O conceito de invariância é fundamental para se compreender a natureza do próprio pensamento matemático. Por exemplo, encontrar propriedades comuns a toda uma classe de objetos é encontrar invariantes – algo de não se altera face à variabilidade admissível no seio dessa mesma classe.

Para operacionalizar a medição do comprimento de um segmento precisamos de outra noção. Numa reta r no espaço podemos definir um **sistema de coordenadas** – uma função bijetiva¹⁰ $f: r \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada ponto da reta faz corresponder um número real de tal modo que, para quaisquer dois pontos da reta A e B, verifica¹¹

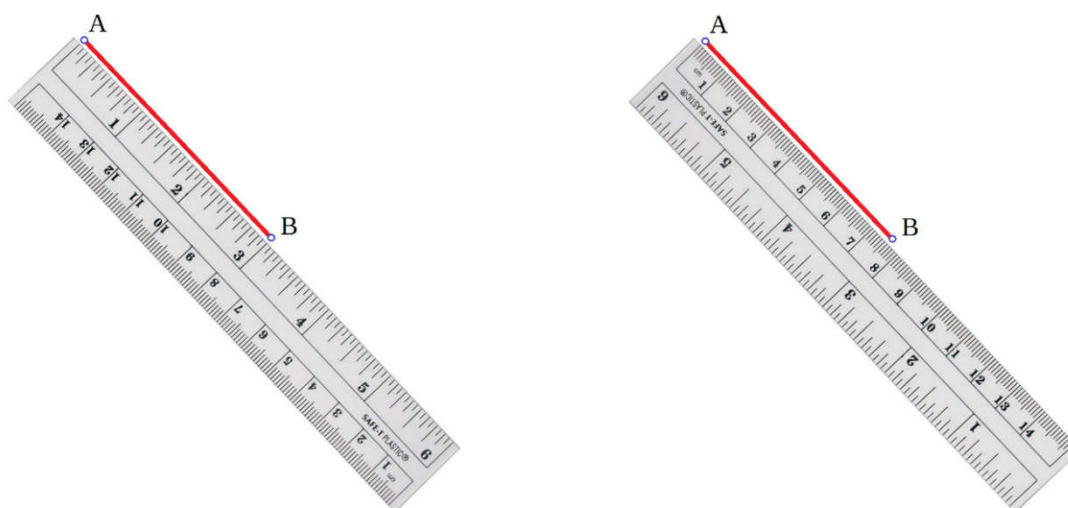
$$d(A, B) = |f(B) - f(A)|.$$

Nas axiomáticas mais «modernas», dá-se o nome de **axioma da régua graduada** a esta proposição (Araújo, 1998).

Para uma mesma reta é possível definir diferentes sistemas de coordenadas. Na prática, isto traduz-se na possibilidade de ter régulas com diferentes graduações. Com certeza, já todos nós vimos (ou trazemos connosco) régulas com duas graduações diferentes: uma em centímetros e outra em polegadas:



Se medirmos o comprimento de um mesmo segmento [AB] usando cada uma das graduações (ou escalas) obtemos diferentes medidas para uma mesma quantidade de grandeza, neste caso o comprimento. Isto decorre do facto de cada um dos bordos da régua terem «impresso» dois sistemas de coordenadas diferentes.



¹⁰ Uma função é bijetiva quando é simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Dito de outro modo, uma função bijetiva transforma objetos diferentes em imagens diferentes, sendo o seu contradomínio coincidente com o conjunto de chegada.

¹¹ $|\cdot|$ representa o valor absoluto ou módulo de um número.

Posicionando a régua de modo a que uma das extremidades coincida com a origem do sistema de coordenadas¹², temos leitura direta para \overline{AB} , em cada um dos sistemas de coordenadas, na imagem do ponto B . Assim,

$$\overline{AB} = |i(B) - i(A)| = i(B) = 3 \text{ in (aprox.)}^{13}$$

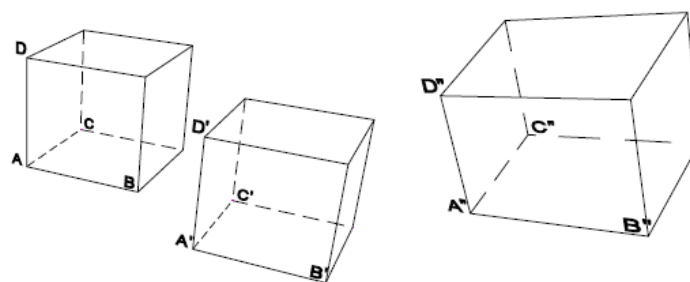
$$\overline{AB} = |c(B) - c(A)| = c(B) = 7,6 \text{ cm (aprox.).}$$

Sendo que, por definição, 1 in = 2,54 cm, a relação entre estes dois sistemas de coordenadas é dado pela expressão

$$i(x) = 2,54c(x).$$

MOVIMENTOS RÍGIDOS¹⁴

Uma outra ferramenta que nos pode ajudar a aproximar a Geometria das nossas experiências do dia-a-dia é noção de *movimento rígido*. O sentido geométrico deste termo apresenta algumas diferenças face ao seu significado comum. Em Geometria, considera-se que o Espaço está «agarrado rigidamente» aos objetos geométricos que dele fazem parte pelo que um movimento de um objeto implica que todo o Espaço se desloca com o objeto. Assim sendo, um movimento rígido é uma forma de associar a cada ponto A do Espaço um ponto A' do Espaço, aquele para onde o ponto se «moveu». Diz-se deste último que é o ponto *transformado* do primeiro por meio de um movimento rígido. Em baixo estão ilustrados dois movimentos rígidos consecutivos de um cubo no Espaço.



¹² Ou seja, ponto cuja imagem é 0. Neste caso, sendo $i(.)$ o sistema de coordenadas associado à medição em polegadas e $c(.)$ o sistema de coordenadas associado à medição em centímetros temos $i(A)=c(A)=0$.

¹³ A referência «in» é a abreviatura de «inch» (polegada, em inglês), habitualmente utilizada para representar essa unidade de medida.

¹⁴ O conteúdo desta secção é uma síntese de algumas ideias apresentadas nas páginas 13 a 28 de Machado (2002). Não sendo uma transcrição, todo o crédito deve ser dado ao referido autor. Qualquer imprecisão decorre do esforço de síntese e simplificação de linguagem, sendo esse da minha inteira responsabilidade.

Na imagem estão identificados quatro dos seus vértices, os respetivos transformados por um primeiro movimento rígido e os transformados destes por um segundo movimento rígido. Chamando R_1 e R_2 aos dois movimentos rígidos, podemos escrever

$$A'=R_1(A) \quad B'=R_1(B) \quad C'=R_1(C) \quad D'=R_1(D)$$

e que

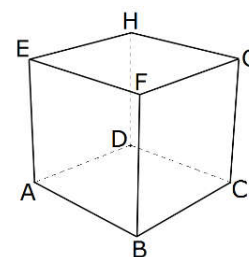
$$A''=R_2(A') \quad B''=R_2(B') \quad C''=R_2(C') \quad D''=R_2(D').$$

Assume-se desde já que os movimentos rígidos preservam as características métricas (e por esse motivo preservam a forma) dos objetos sujeitos a transformação. Daquilo que podemos intuir da figura anterior, os sucessivos movimentos rígidos do cubo resultam num outro cubo com as mesmas dimensões. Podemos assim estabelecer que uma sequência de movimentos rígidos corresponde, ela própria, a um movimento rígido.

Podemos agora clarificar um pouco melhor o que se entende por congruência em Geometria. Diremos que dois objetos geométricos (segmentos de reta, cubos, quadrados, triângulos, etc.) são **congruentes** (ou geometricamente iguais) se for possível fazê-los coincidir ponto por ponto recorrendo a um movimento rígido.

EXERCÍCIOS E COMPLEMENTOS

1. Na representação do cubo apresentada no texto (e aqui novamente reproduzida) conseguimos identificar os seus vértices – A, B, C, D, E, F, G e H; as suas arestas, por exemplo [AE], [FG] ou [BC]; e ainda faces, como [ABFE] ou [CBFG].



Tendo em conta os axiomas 1 e 3, dois pontos distintos definem univocamente uma reta e três pontos não colineares definem univocamente um plano. Deste modo,

- Podemos representar por AE, FG e BC as retas de suporte¹⁵ das arestas [AE], [FG] e [BC], respetivamente.
- Podemos representar por ABF e CBG os planos de suporte¹⁶ das faces [ABFE] e [CBFG], respetivamente. Uma vez que três pontos não colineares são suficientes para definir um plano usou-se apenas três dos quatro vértices que definem a face.

¹⁵ Chamamos *reta de suporte de um segmento de reta* à reta que é definida pelos pontos que são as extremidades do segmento de reta dado. Dito de outra forma, a reta de suporte de um segmento resulta de se prolongar o segmento ao longo da direção por ele definida. Todo o segmento de reta é um subconjunto estrito da sua reta de suporte.

¹⁶ A noção de plano de suporte decorre por analogia da de reta de suporte descrita na nota anterior.

Como consequência, tem-se que, por exemplo, ABF, BFE, ABE ou AFE são representações diferentes do mesmo plano (plano de suporte de [ABFE]).

Exercício 1.1. Os segmentos [AF] e [EG] são exemplos de **diagonais faciais** do cubo, uma vez que são segmentos que unem vértices que pertencem à mesma face sem que estes sejam arestas. Uma **diagonal espacial** do cubo é um segmento de reta que une dois dos seus vértices não pertencentes à mesma face. Identifique:

- a. As restantes diagonais faciais do cubo;
- b. Todas as diagonais espaciais do cubo.

Exercício 1.2. Determine, a partir da representação do cubo:

- a. Dois segmentos de reta paralelos à aresta [GH];
- b. Três retas concorrentes com DH no ponto H;
- c. Duas retas que não sejam coplanares;
- d. Dois planos paralelos à reta AD;
- e. Dois planos concorrentes com a reta EF;
- f. Dois planos concorrentes em AC.

2. Os axiomas apresentados na página 7 estabelecem um conjunto de relações básicas entre termos primitivos que são bastante fáceis de aceitar sem demonstração, sendo intuitivos e suficientemente simples para serem «operacionalizados» de modo a obter proposições a partir destes.

Dois pontos distintos definem univocamente uma reta e três pontos não colineares definem univocamente um plano (axiomas 1 e 3). Os axiomas 2 e 4 estabelecem que, no espaço, existem «muitos» pontos: Dada uma reta, existem pontos que não pertencem a essa reta (para além daqueles que lhe pertencem) e dado um plano, existem pontos que não pertencem a esse plano (para além daqueles que lhe pertencem). São determinadas regras básicas de interseção de dois planos (axioma 5), de uma reta e um plano (axioma 6) e a existência de paralelismo de retas no espaço.

Apresentam-se de seguida dois exemplos de proposições que são demonstradas a partir de alguns dos axiomas enunciados atrás. Não esquecer que, apesar da possível evidência óbvia das ditas proposições, apenas há duas formas de determinar as verdades matemáticas: ou se tomam como axiomas ou então necessitam de prova. No que toca a construir axiomáticas é válido o princípio da economia: apenas se assumem como verdadeiras (sem necessidade de demonstração) o menor número possível de afirmações sem dependência lógica. Todas as outras afirmações que sejam do nosso conhecimento que «assim é, porque se está mesmo a ver» estão sujeitas a demonstração, seguindo as regras do raciocínio formal em Matemática, de modo a

integrarem o «sistema». O nível de formalismo a empregar nas demonstrações será contido, de modo a que o *conteúdo* não se dilua nas questões formais.

Proposição: Duas retas distintas não se podem intersectar em mais do que um ponto.

Demonstração:

- Se duas retas se intersectassem em dois pontos (chamemos-lhes A e B), então isso significaria que esses mesmos dois pontos definiriam duas retas distintas, o que contradiz o axioma 1.

Proposição: Dado um plano no espaço, existem retas que estão contidas no plano e outras que o não estão.

Demonstração:

- Do axioma 3, temos que um plano fica definido por 3 dos seus pontos (não colineares), chamemos-lhe A, B e C;
- Pelos axiomas 1 e 6, as retas AB, AC ou BC estão contidas no plano;
- Do axioma 4, estabelecemos a existência de pontos do Espaço não pertencentes ao plano. Seja D um desses pontos.
- A reta AD não está contida no plano.

Exercício 2.1.¹⁷ Demonstre, com base nos axiomas enunciados na página 7, as proposições seguintes:

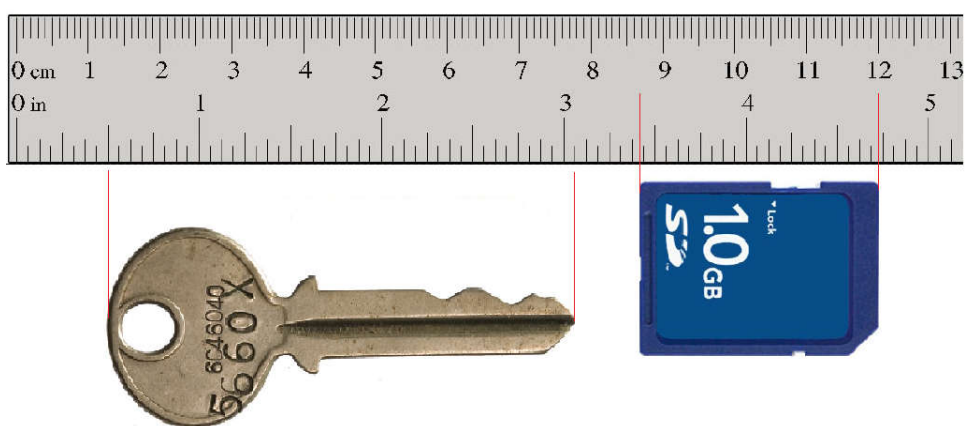
- a. Por uma reta e um ponto não pertencente a essa reta passa um e um só plano (uma reta e um ponto exterior a esta definem um plano).
- b. Dadas duas retas distintas que passem por um mesmo ponto, existe um único plano que contém ambas (duas retas concorrentes definem um plano).
- c. Se dois planos não são paralelos então ou são coincidentes ou a sua interseção é uma reta.

¹⁷ Este é um exercício mais focado em aspetos formais e que, nesta fase, pode não ser ainda suficientemente significativo para o/a estudante. O leitor ou leitora pode, se assim o entender, deixar para mais tarde a leitura atenta deste complemento e a resolução dos exercícios de demonstração propostos.

3. **Exercício 3.1.** Três retas, AB, BC e BD, concorrentes em B, mas não coplanares, quantos planos definem?

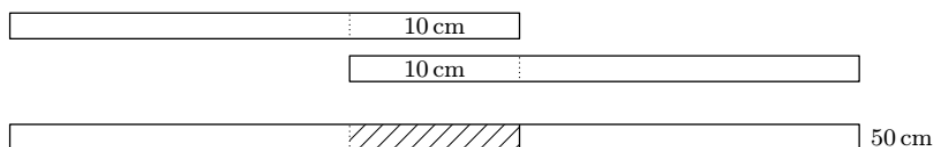
Exercício 3.2. Quatro pontos A, B, C e D, não coplanares e sem que haja três colineares, quantos planos definem?

4. **Exercício 4.1.** Na figura em baixo encontram-se representados uma régua graduada (em cima) em centímetros e (em baixo) em polegadas (in) e dois objetos – uma chave e um cartão de memória.



- Determine o comprimento: a. do cartão de memória, em centímetros.
b. da chave, em polegadas.

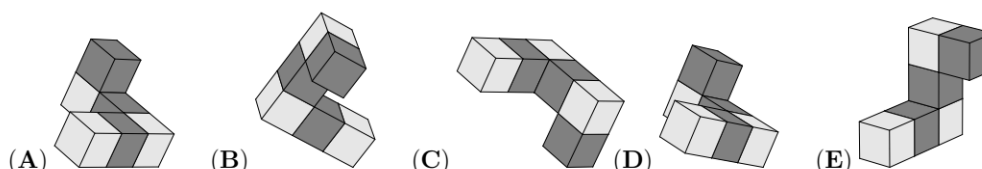
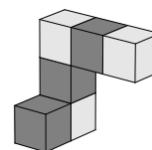
Exercício 4.2.¹⁸ Com duas tiras de papel de igual comprimento podemos fazer uma tira com 50 cm colando-as ao longo de uma região, que ficará sobreposta, com 10 cm (ver figura).



Qual seria o comprimento da zona sobreposta de colagem para criar uma tira de 56 cm?

¹⁸ Adaptado de Canguru Matemático sem Fronteiras de 2015, categoria Benjamim.

5. **Exercício 5.1.**¹⁹ O «hexacubo» (figura tridimensional composta a partir de 6 cubos geometricamente iguais), representado na figura ao lado foi sujeito a um movimento rígido. Identifique qual das seguintes composições seria impossível de resultar desse movimento rígido.



REFERÊNCIAS

- Araújo, P. (1998). *Curso de Geometria*. Lisboa: Editora Gradiva.
- Hernandez, J. (Ed.)(1996). Geometria. In *Enciclopédia Audiovisual Educativa: Matemática* (volume 1, pp. 151-160). Lisboa: Editora Liarte.
- Hilbert, D. (2003). *Fundamentos da Geometria* (Edição revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira). Lisboa: Editora Gradiva
- Jacobs, H. (2003). *Geometry – Seeing, Doing, Understanding*, 3rd Edition. Nova Iorque: W. H. Freeman & Co.
- Johnston-Wilder, S. & Mason, J. (Eds.)(2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: Open University & Paul Chapman Publishing
- Machado, A. (2002). *Geometria 10º Ano – Versão para professores*. Universidade de Lisboa – Faculdade de Ciências – Departamento de Matemática. Projecto REANIMAT – Fundação Calouste Gulbenkian
- Veloso, E. (1998). *Geometria – Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

¹⁹ Adaptado de Canguru Matemático sem Fronteiras de 2016, categoria Cadete.