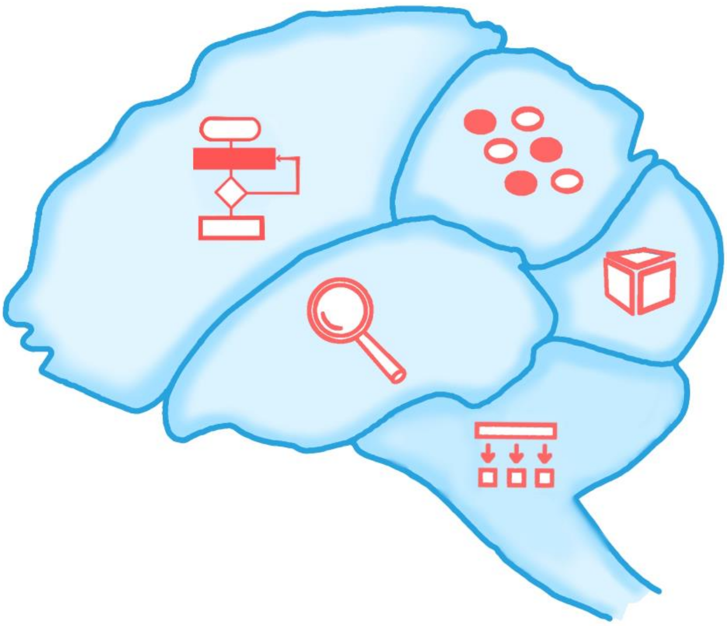
Contributos para o desenvolvimento do pensamento computacional em Matemática

Materiais de apoio para os professores

do 1.º ciclo do ensino básico



Renata Carvalho

Rui Gonçalo Espadeiro

Neusa Branco

Março 2023

APM
Associação de Professores
de Matemática

Ficha técnica

Título
Contributos para o desenvolvimento do pensamento computacional em Matemática: Materiais de apoio para os professores do 1.º ciclo do ensino básico

Autores
Renata Carvalho, Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática
Rui Gonçalo Espadeiro, Agrupamento de Escolas de Redondo
Neusa Branco, Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém

Editor
Associação de Professores de Matemática

Capa
Catarina Carvalho Carrapiço

ISBN
978-972-8768-77-5

Data
Março de 2023

APM Associação de Professores de Matemática

APM Centro Formação

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

A publicação *Contributos para o desenvolvimento do pensamento computacional em Matemática: Materiais de apoio para os professores do 1.º ciclo do ensino básico* decorre do trabalho realizado na formação contínua de professores do 1.º ciclo do ensino básico pelo Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática, no âmbito do Projeto-Piloto MatemaTIC.

Esta primeira parte da brochura discute as principais ideias relativas às práticas de pensamento computacional que orientaram a capacitação de professores do 1.º ciclo do ensino básico, participantes no Projeto-Piloto MatemaTIC no ano letivo 2020-2021, bem como uma breve descrição da operacionalização da formação.

1.1. Práticas de pensamento computacional

De acordo com os documentos curriculares de Matemática para o ensino básico (Canavarro et al., 2021), “o pensamento computacional pressupõe o desenvolvimento, de forma integrada, de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos” (p. 3).

Em seguida, é feita uma descrição mais pormenorizada sobre cada uma destas práticas e a forma como poderão ser promovidas, apresentando-se um conjunto de questões orientadoras, como também expresso em Espadeiro (2021).

Com a **abstração** pretende-se reduzir a complexidade de uma tarefa ou problema, ou identificar princípios gerais que podem ser aplicados em situações ou problemas similares. Para promover o desenvolvimento desta prática poderão ser tidas em consideração algumas questões orientadoras, como por exemplo:

- Como podemos simplificar este problema/tarefa?
- Qual é a informação relevante para resolver este problema/tarefa?
- Como podemos representar claramente a informação importante?
- De que forma podemos relacionar a informação importante tendo em vista o ponto de partida e o resultado a alcançar (dar resposta ao problema ou resolver a tarefa)?

A **decomposição** é uma prática já bem conhecida na atividade matemática, sendo comum na resolução de problemas. No contexto do pensamento computacional, a decomposição trata da gestão de tarefas ou situações complexas dividindo-as em partes menores e mais fáceis de gerir. Os alunos podem usar a decomposição para abordar problemas que, à primeira vista, podem parecer intimidadores. Algumas questões orientadoras para ajudar a promover esta prática poderão ser as seguintes:

- Que detalhes identificamos neste problema, desafio ou tarefa? Como se relacionam esses elementos?
- Como podemos usar os detalhes para identificar partes deste problema, desafio ou tarefa?
- Que partes são familiares? Que partes são desconhecidas?
- Quais são as diferentes formas de resolver este problema, desafio ou tarefa?
- É possível decompor as partes em partes mais pequenas?

- Como é que a decomposição deste problema ou desafio nos pode ser útil para o resolver ou compreender?

Os padrões são de igual modo muito familiares na matemática. Na perspetiva do pensamento computacional o **reconhecimento de padrões** envolve reconhecer regularidades e relações. Para promover a identificação de padrões, os professores poderão ter em conta as seguintes questões orientadoras:

- Que semelhanças ou padrões encontramos entre os problemas, desafios ou tarefas? Por exemplo, quantos objetos existem? Que cores veem? Que repetições identificam?
- Como podemos utilizar os detalhes para identificar partes deste problema, desafio ou tarefa? Que relações existem entre as partes?
- Como podemos descrever os padrões?
- Como se pode utilizar o padrão para fazer previsões ou tirar conclusões?

Com a **análise e definição de algoritmos** pretende-se criar oportunidades que permitam desenvolver uma solução passo a passo para um dado problema (etapas de resolução) ou ainda, o estabelecer de regras (condições) a serem seguidas para resolver o problema. A prática poderá ser promovida com o recurso às seguintes questões:

- Quais as etapas necessárias para a resolução do problema ou tarefa?
- Qual é a informação necessária para a concretização de cada uma das etapas?
- Como estruturar todos os passos necessários para a resolução do problema ou tarefa?

Depurar é procurar e corrigir erros. Para além disso poderá assumir, de igual modo, ações de testagem, verificação, refinamento e otimização da resolução apresentada. Para promover ações de **depuração**, os professores poderão ter em conta as seguintes questões:

- Como podemos garantir que o nosso plano, modelo, ou solução funcionou ou não?
- O resultado corresponde ao que esperávamos?
- Como podemos modificar a abordagem para corrigir falhas ou imprecisões?
- Como é que sabemos se conseguimos corrigir o erro?

O desenvolvimento do pensamento computacional deverá ser suportado em tarefas que permitam, simultaneamente, trabalhar conhecimentos matemáticos a par com uma ou outra capacidade matemática. Estas tarefas, que podem ser adaptadas ou criadas de raiz, serão tanto mais ricas consoante as práticas do pensamento computacional que permitam trabalhar e desenvolver nos alunos. Porém, é perfeitamente natural o recurso a tarefas que não visem todas as práticas. Para que o desenvolvimento do pensamento computacional possa ocorrer será necessária uma especial atenção à dinâmica e interação entre todos os intervenientes (professor e alunos), nos diferentes momentos da aula. A intencionalidade com que o professor interage com os seus alunos, recorrendo ao questionamento sempre que estes revelem dificuldades em avançar, constitui-se como um fator preponderante para que as práticas do pensamento computacional possam ser desenvolvidas.

O pensamento computacional vai muito além da capacidade de programar ou do recurso à tecnologia. Este foca-se em conceitos que são subjacentes à programação e não só na ação da programação em si, o que exige múltiplos níveis de abstração e capacidade reflexiva de um ponto de vista não rotineiro.

1.2. Formação de professores

O Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática desenhou um plano de formação centrado na articulação entre as orientações curriculares para as TIC e as aprendizagens essenciais de Matemática no 1.º ciclo e, entre fevereiro e março de 2020 iniciou nove oficinas de formação, num primeiro momento em regime presencial, mas que devido à situação pandémica do país causada pelo COVID-19, tiveram de ser repensadas. Assim, entre outubro de 2020 e junho de 2021 iniciou-se, em regime de *e-learning*, um curso de formação de formadores e nove cursos de formação para professores do 1.º ciclo do ensino básico de vários pontos de Portugal Continental, onde participaram cerca de 100 professores e 11 formadores. A organização e a implementação desta formação, realizada no âmbito do Projeto-Piloto MatemaTIC, foram da responsabilidade do Centro de Formação da Associação de Professores de Matemática. Este projeto teve o seu início em 2018, numa parceria entre a Associação de Professores de Matemática (APM), a Direção-Geral da Educação (DGE), o CCTIC da Universidade de Évora (CCTICUE) e a Universidade de Coimbra (UC), enquanto entidade avaliadora do projeto, e contou com diversas iniciativas como se pode consultar em Carvalho et al. (2021).

Deste modo, pretendia-se, através da formação contínua, capacitar professores do 1.º ciclo do ensino básico para integrarem nas suas práticas a articulação entre as aprendizagens essenciais de Matemática de 2018 e as orientações curriculares para as TIC no 1.º ciclo, com enfoque no desenvolvimento do pensamento computacional, pelo que se definiram os seguintes objetivos:

- Conhecer métodos e estratégias para a integração de abordagens diferenciadoras no currículo da Matemática, com recurso às TIC e sua utilização em contexto educativo;
- Experimentar e explorar diversas áreas do pensamento computacional, passíveis de desenvolver a aprendizagem dos alunos;
- Desenhar e aplicar cenários de aprendizagem que prevejam a integração das tecnologias;
- Refletir de forma crítica sobre a aplicação destas práticas pedagógicas e analisar as suas potencialidades;
- Contribuir para criar dinâmicas de trabalho colaborativo na escola;
- Colaborar e partilhar experiências e recursos no grupo de formação e na comunidade educativa.

A formação contínua teve, claramente, a intencionalidade de, a partir das aprendizagens essenciais de matemática, desenvolver o pensamento computacional dos alunos em articulação com as orientações curriculares para as TIC no 1.º ciclo do ensino básico. Pretendia-se lançar um novo olhar sobre algumas das tarefas que os professores já desenvolviam com os seus alunos, selecionando-as e adaptando-as com uma intencionalidade centrada na promoção de práticas de pensamento computacional, mas também apresentar novas tarefas que fossem ao encontro dos objetivos da formação. Os professores foram desafiados a resolver tarefas enquadradas em vários temas matemáticos e com recursos diversos. Fomentou-se a resolução de tarefas com papel e lápis e, incentivou-se o uso de materiais manipuláveis (mesmo na formação a distância), de objetos tangíveis e de ambientes digitais diversificados, entre eles a programação visual (e.g., Scratch), dando uma perspetiva abrangente dos recursos que podem ser usados para promover o desenvolvimento do pensamento computacional nos alunos e reforçando a ideia de que este também se pode abordar sem recurso a computadores.

Da formação resultaram materiais de apoio para os professores do 1.º ciclo do ensino básico, tendo-se selecionado um conjunto de propostas que se apresentam na segunda parte desta brochura.

2. MATERIAIS DE FORMAÇÃO

Os materiais de formação são constituídos pelo enunciado da tarefa a propor aos alunos do 1.º ciclo do ensino básico, um guião de exploração de apoio ao trabalho do professor, que inclui o enquadramento curricular da tarefa, recursos a utilizar e orientações para a sua dinamização na aula, bem como os respetivos anexos. Nas orientações para a exploração da tarefa apresentam-se exemplos de estratégias de resolução, sugestões ao nível do questionamento a realizar pelo professor e destacam-se práticas de pensamento computacional ao longo do desenvolvimento da tarefa.

As tarefas, que aqui se apresentam, foram pensadas para serem implementadas com dinâmicas de aula centradas em práticas de ensino exploratório da matemática (Canavarro, 2011) que contribuíssem para o desenvolvimento das aprendizagens essenciais que constavam do documento publicado em 2018 e de áreas de competência do Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (ME-DGE, 2017), nomeadamente no que respeita ao pensamento crítico e criativo dos alunos, ao raciocínio e à resolução de problemas. Contudo, e tendo em conta que novas orientações curriculares entraram em vigor em setembro de 2022, o enquadramento curricular destas tarefas foi devidamente atualizado considerando as aprendizagens essenciais de matemática no 1.º ciclo do ensino básico (Canavarro et al., 2021), para que esta brochura possa constituir-se como um apoio às práticas dos professores no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento computacional integrado no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Em seguida apresentam-se sete tarefas selecionadas de entre as que foram trabalhadas na formação de professores. Algumas das tarefas estão subdivididas em várias partes, constituindo-se como uma sequência no seu todo para se alcançarem os objetivos previstos. Um aspeto a que também é dado bastante destaque nestes materiais de apoio é a utilização de recursos diversificados para favorecer a compreensão de ideias matemáticas e o desenvolvimento de capacidades matemáticas. A utilização desses recursos é discutida no guião de exploração, através de exemplos que antecipam o trabalho que pode ser realizado pelos alunos.

ADIVINHA O NÚMERO

Tarefa

1. Em pares vão realizar um jogo. Um elemento do grupo pensa num número entre 0 e 7. O outro elemento pode colocar questões apenas de resposta sim ou não. A partir das respostas que o primeiro elemento dá às questões, o segundo tem de acertar no número em que ele pensou. Tentem fazer o menor número de questões possível.

1.1. Registem todas as questões e respostas na tabela seguinte, até alcançar o número a descobrir.

Questão	Resposta (sim/não)

1.2. Agora troquem de posição e joguem de novo. Façam novo registo numa nova tabela.

Questão	Resposta (sim/não)

1.3. Existe um número mínimo de questões que é necessário realizar para garantir que se encontra qualquer número entre 0 e 7 em que se pense? Que questões nos permitem chegar ao número de forma mais rápida? Façam o registo das vossas conclusões.

2. E se agora tivermos de pensar num número entre 1 e 100, qual será o número mínimo de questões que é necessário fazer para garantir que se encontra qualquer número em que se possa pensar? Que questões nos permitem chegar ao número de forma mais rápida? Façam o registo das vossas conclusões.

Nota: A questão 2 deve ser realizada com alunos que tenham abordados números naturais até 100.

Guião de exploração

Breve apresentação

Com esta tarefa, pretende-se que um dos alunos do par em jogo, adivinhe o número que o outro pensou, de entre uma lista de números (entre 0 e 7, entre 1 e 100, ou outra lista). Para tal, devem formular questões de resposta sim/não, que permitam eliminar a maior quantidade de números possível por forma a conseguir adivinhar o número em que o outro elemento do par pensou, o mais rapidamente possível. Esta tarefa aborda conceitos de par e ímpar e de igualdade/desigualdade, que podem começar a ser explorados a partir do 1.º ano de escolaridade.

A questão 1 desta tarefa tem um tempo previsto de 50 minutos para a sua realização e discussão, mais 40 minutos para a questão 2.

As orientações para a exploração da tarefa “Adivinha o número”, incluem uma proposta adicional de um problema – “Os brinquedos do Manuel” – que segue a mesma lógica de abordagem.

Enquadramento Curricular

Matemática

Capacidades matemáticas:

- Raciocínio (Conjeturar justificar)
- Comunicação (Expressão e discussão de ideias)
- Representações matemáticas (Representações múltiplas)
- Pensamento computacional (Abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e depuração)

Tema matemático: Números

Tópicos/subtópicos:

- Números naturais: usos de um número natural

Objetivos de aprendizagem

- Reconhecer números pares e ímpares
- Comparar e ordenar números naturais, de forma crescente e decrescente

Recursos

- Enunciado da tarefa
- Balanças digitais ou balança de pratos e caixas com berlindes de vidro e uma peça de chumbo (para o problema “Os brinquedos do Manuel”)

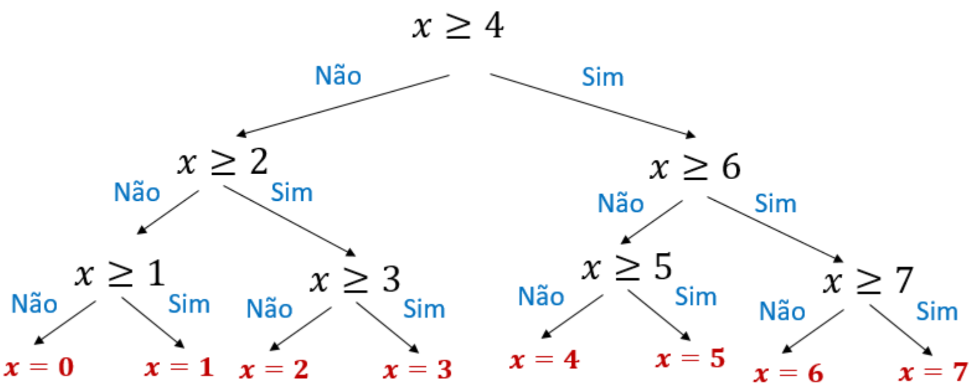
Orientações para a exploração

A concretização deste jogo centra-se no princípio da decomposição e na criação de igualdades/desigualdades. Sugere-se iniciar o jogo com números entre o 0 e o 7, mas o professor pode usar um conjunto de números diferente e até optar por, gradualmente, ir aumentando o conjunto de números em jogo. É desejável que os alunos explorem diferentes estratégias e que estas sejam discutidas em aula com o professor e restante turma.

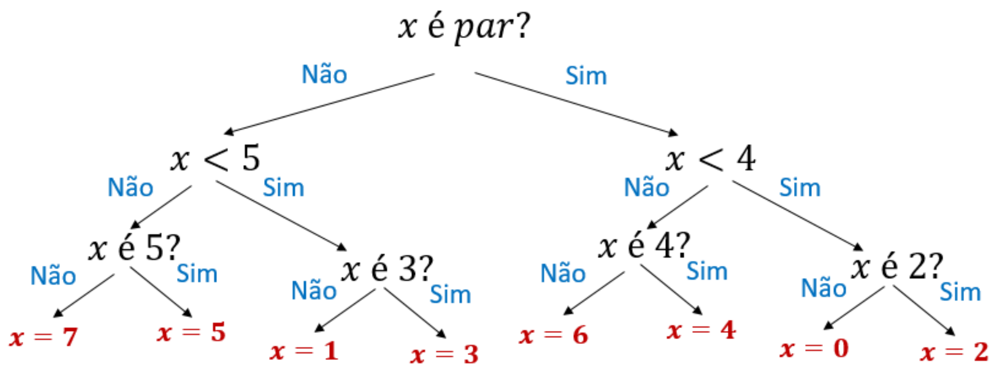
Abstração
Formular boas questões tendo em conta o conjunto de números disponíveis no jogo.

Os alunos devem justificar porque usaram determinada estratégia em detrimento de outra, que efeito tem uma dada questão na concretização do objetivo de jogo ou que tipo de questão pode eliminar mais ou menos números. Devem compreender que uma boa formulação de questões pode ser muito importante para conseguir adivinhar o número em que o adversário pensou. A discussão em torno dessas questões permite aos alunos analisarem conjuntos de números que satisfazem uma cada condição e o significado de "maior que", "menor que" ou "igual a". O professor deve incentivá-los a escolherem uma estratégia eficiente, que lhes permita adivinhar o número em que o adversário pensou com o menor número possível de questões.

Para chegar ao número escolhido, e não divulgado, pelo adversário, o aluno deve analisar o conjunto de números que está a ser usado, C. Por exemplo, entre 0 e 7 existem 8 números ($C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$). Os números de 0 a 3 estão na primeira metade deste conjunto e os números de 4 a 7 na segunda metade. Questões que permitam perceber em que metade está o número em que o adversário pensou ajudam a ser mais eficiente na procura da resposta correta. Por exemplo, a pergunta inicial pode ser "O número é maior ou igual a 4?". Independentemente da resposta ser sim ou não, esta questão permite eliminar metade dos números em jogo. As questões seguintes devem apoiar a análise das metades sucessivas em que o conjunto vai sendo dividido, tal como se sugere no esquema seguinte:



O aluno também pode iniciar com a questão "É par?", que neste caso, divide igualmente o conjunto de números inicial em dois subconjuntos com igual número de elementos (subconjunto dos números pares, {0, 2, 4, 6}, e subconjunto dos números ímpares, {1, 3, 5, 7}). Esta questão permite igualmente eliminar metade dos números em jogo. Depois, as questões seguintes devem procurar eliminar metade dos números do subconjunto em que se encontra o número em que o adversário pensou, como se sugere no esquema seguinte:



As estratégias anteriores podem ser usadas num qualquer intervalo de números, sendo sempre essencial que os alunos explorem as suas próprias estratégias e que as discutam e justifiquem para perceber as suas vantagens ou desvantagens. Devem concluir que para garantir a descoberta do número neste conjunto de números são necessárias três questões.

Os alunos podem utilizar tabelas numéricas, diagramas em árvore ou outras representações para registar os números que são eliminados ou o conjunto dos números que contêm o escolhido pelo outro jogador.

A proposta do jogo, com uma lista de números entre 0 e 7, não é suficientemente extensa por forma a permitir uma decomposição. Como tal, as estratégias aprendidas com um menor conjunto de números (por exemplo, de 0 a 7) podem servir para generalizar para jogos com listas mais extensas como, por exemplo, a lista entre 1 e 100.

Para descobrir um número entre 1 e 100 pode, por exemplo, usar-se uma tabela de números da qual se vão eliminando os números mediante a resposta sim/não do adversário. Para chegar ao número escolhido e não revelado pelo adversário de forma rápida, sugere-se que em cada questão, tal como na situação dos números entre 0 e 7, se procure eliminar sempre metade dos números ainda disponíveis na tabela.

Decomposição
Selecionar um intervalo de números menor, dentro da lista de 1 a 100, sobre o qual deve fazer questões para eliminar números.

É desejável que, após discussão de diversas estratégias, os alunos cheguem a uma estratégia idêntica à que de seguida exemplificamos e que garante a descoberta do número em que pensou o adversário fazendo no máximo sete questões.

Se o aluno A pensa no número 26 (número escolhido e não revelado), o aluno B pode começar pela questão “O número é maior ou igual a 50?”. Perante essa questão o aluno A tem de responder “Não”, pelo que todos os números maiores ou iguais a 50 são eliminados.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~	~~100~~

A questão seguinte pode ser, por exemplo, “O número é menor ou igual a 25?” (a referência deve ser metade da quantidade de números que sobra). A resposta a dar pelo aluno que pensou no número neste exemplo é “Não” e todos os números menores ou iguais a 25 são eliminados.

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~	~~100~~

A próxima questão pode ser, por exemplo, “O número é menor ou igual a 37?”. Perante a resposta “Sim” do seu adversário, o aluno vai eliminar todos os números da tabela maiores ou iguais a 37.

~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	~~10~~
~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~
~~41~~	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Um exemplo de questão seguinte é "O número é maior ou igual a 31?". A resposta é "Não" e todos os números da tabela maiores ou iguais a 31 são eliminados.

~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	26	27	28	29	30
~~31~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~

A próxima questão pode ser, por exemplo, "O número é menor ou igual a 28?", sendo a resposta "Sim". Assim, todos os números da tabela maiores ou iguais a 28 são eliminados.

~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	26	27	~~28~~	~~29~~	~~30~~

Restam apenas dois números, pelo que a última questão dá acesso ao número em que pensou o adversário. O jogador aqui pode optar por questionar se é um número em específico. Se a resposta for sim, acertou, se a resposta for não, é porque é o outro número. Nesta simulação que estamos a discutir, uma pergunta pode ser: "É o 27?". Neste caso a resposta é "Não", podendo o aluno concluir que o seu adversário pensou no número 26.

Seguindo a estratégia sugerida, os alunos formulam 7 questões no máximo, para descobrirem o número em que pensou o adversário, como sistematizamos no quadro seguinte. Ao longo do jogo, os alunos podem encontrar padrões na forma como colocam as questões. Estes padrões tornam-se mais evidentes no jogo com listas mais extensas.

Reconhecimento de padrões
Reconhecer padrões no questionamento.

Questão	Resposta (sim/não)
o número é maior ou igual a 50?	Não
o número é menor ou igual a 25?	Não
o número é menor ou igual a 37?	Sim
o número é maior ou igual a 31?	Não
o número é menor ou igual a 28?”	Sim
É o 27?	Não
É o 26?	Sim

A estrutura do questionamento sugerido garante o número mínimo de questões necessárias para chegar ao número selecionado pelo adversário. Contudo, outras questões que envolvem outros conhecimentos matemáticos sobre números podem surgir, dependendo do conhecimento dos alunos e do ano de escolaridade em que se encontrem, como por exemplo: “O número é múltiplo de 2?”, “É um número ímpar?”, “É um número par?”. Caso surjam, estas questões devem ser discutidas com os alunos, não só do ponto de vista do conhecimento matemático que envolvem, mas enquanto estratégia de jogo.

Ao longo do jogo, os alunos, devem verificar se a eliminação de números do conjunto disponível foi feita de acordo com as respostas às questões colocadas. Podem registar as questões e verificar os números eliminados no final do jogo ou enquanto jogam. Esta verificação também pode apoiar a reformulação de questões de modo a perceber que estratégias poderiam ter seguido na formulação das questões, por forma a garantir o menor número de tentativas.

Depuração
Verificar se os números eliminados correspondem às respostas às questões colocadas.

Os brinquedos do Manuel

Tarefa

Outra tarefa cuja resolução segue a estratégia de a cada passo reduzir as opções a metade (no caso em que se recorra à balança de pratos), descrita no “Adivinha o número”, é o problema “Os brinquedos do Manuel”, cujo enunciado se apresenta:

A mãe do Manuel arrumou 32 berlindes de vidro em caixas com 2 peças cada uma. Todas as peças são iguais à exceção de uma que é de chumbo e que o Manuel prometeu oferecer ao João. As caixas não podem ser abertas, mas podem ser pesadas. Não podes realizar cálculos. Todas as decisões são baseadas nas pesagens. Ajuda o Manuel a descobrir em que caixa a mãe guardou a peça de chumbo, que tem maior massa que as restantes peças.

Qual o menor número de pesagens que deves fazer para garantir que encontras a caixa certa?

A resolução e discussão deste problema tem um tempo estimado de 60 minutos e permite mobilizar conhecimentos sobre, por exemplo, decomposição de números, o dobro e a metade de números. A sua resolução requer a definição de uma estratégia que permita, através de pesagens, descobrir a caixa que tem a peça de chumbo, mais

Abstração
Perceber que é necessário efetuar o menor número de pesagens possível.

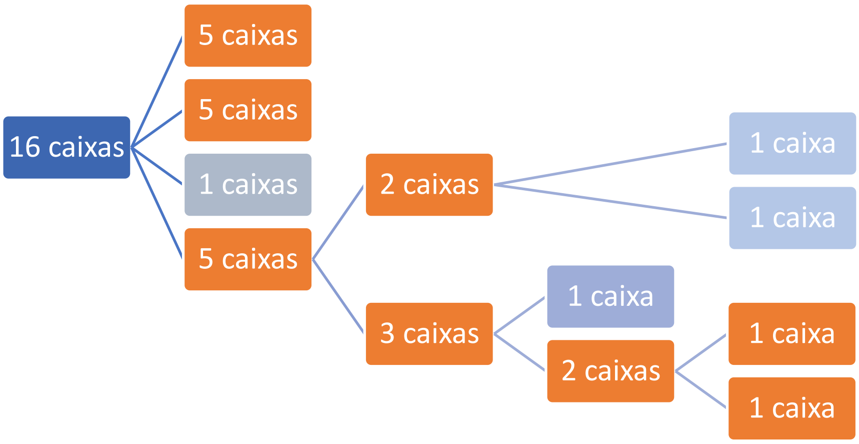
pesada que as restantes. Os alunos podem começar por apresentar algumas sugestões de pesagens, sem ter presente que necessitam de efetuar o menor número de pesagens possível.

Estratégias com balança digital

Algumas possíveis estratégias dos alunos que podem surgir usando a balança digital (nos esquemas que se apresentam, os grupos assinalados com cor de laranja correspondem às caixas que são pesadas):

A) Pesar cada uma das 16 caixas com 2 berlindes cada. Nesta situação podem ser realizadas 15 pesagens, caso a última caixa a pesar seja a que tem a peça de chumbo.

B) Pesar grupos com um número diferente de caixas. Esta estratégia enfatiza o 16 como um múltiplo de 5 mais 1 e a decomposição de 5 como 3 + 2. O número mínimo de pesagens que garante a descoberta da caixa é exemplificado no seguinte esquema:

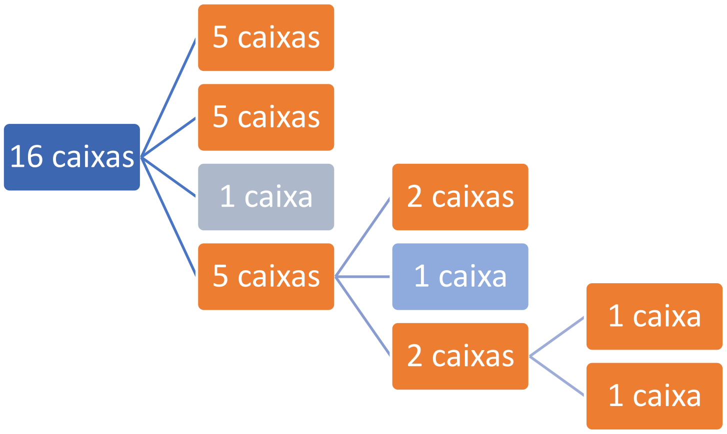


- Se, ao pesar os 3 grupos de 5 caixas, todos tiverem o mesmo peso, então a peça de chumbo está na caixa que sobra;
- Ao pesar os 3 grupos de 5 caixas, o que pesar mais contém a peça de chumbo e deve ser definida uma estratégia de pesagem para esse grupo de caixas;
- Dividir o grupo de 5 caixas em dois grupos, um com 2 caixas e outro com 3 caixas e pesar cada um;
- Pode a peça de chumbo estar no grupo de 3 caixas pelo que é necessário subdividir esse grupo em 2 caixas e 1 caixa. Pesar este grupo de 2 caixas e compará-lo com o grupo de 2 caixas em que se dividiram as 5 caixas anteriormente. Se for necessário continuar a pesagem do grupo de 2 caixas, resta pesar cada uma das caixas.

Decomposição
Selecionar o número de caixas a usar em cada pesagem.

R.: 3 pesagens + 2 pesagem + 1 pesagem + 2 pesagem = 8 pesagens

C) Pesar grupos com um igual número de caixas para garantir comparação entre grupos. Esta estratégia enfatiza o 16 como um múltiplo de 5 mais 1 e o 5 como quase dobro (dobro de 2 mais 1). As pesagens podem ser exemplificadas no seguinte esquema para o número mínimo de pesagens que garantem a descoberta da peça:

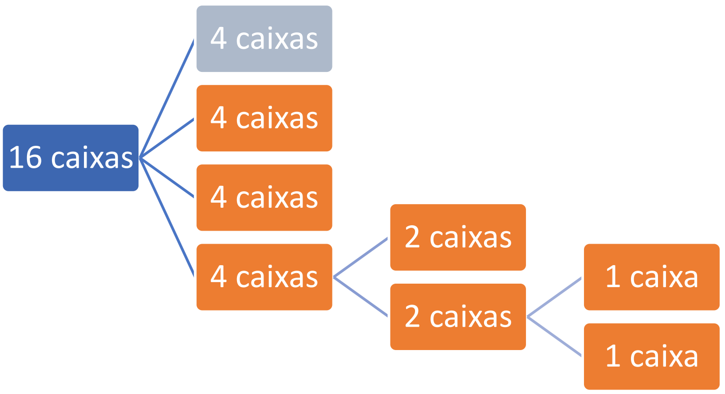


- Se, ao pesar os 3 grupos de 5 caixas todos tiverem o mesmo peso, então a peça de chumbo está na caixa que sobra;
- Ao pesar os 3 grupos de 5 caixas, o que pesar mais vai ser subdividido para continua as pesagens;
- Subdividir o grupo de 5 caixas mais pesado em dois grupos de 2 caixas (para garantir grupos para comparação) e mais 1 caixa, e
- Se, as pesagens dos dois grupos de 2 caixas forem iguais, a peça de chumbo está na caixa de 1. Se um dos grupos de 2 caixas for mais pesado, as pesagens continuam com essas caixas. Por fim, pesa-se cada uma das caixas restantes.

R.: 3 pesagens + 2 pesagem + 2 pesagem = 7 pesagens

D) Começar por pesar grupos de 4 caixas e depois grupos com metade do número de caixas. Esta estratégias permite decompor o 16, o 4 e o 2 no número máximo de ramificações com número igual de caixas (possibilidade de relacionar adição repetida de parcelas, multiplicação e divisão com o partilha equitativa).

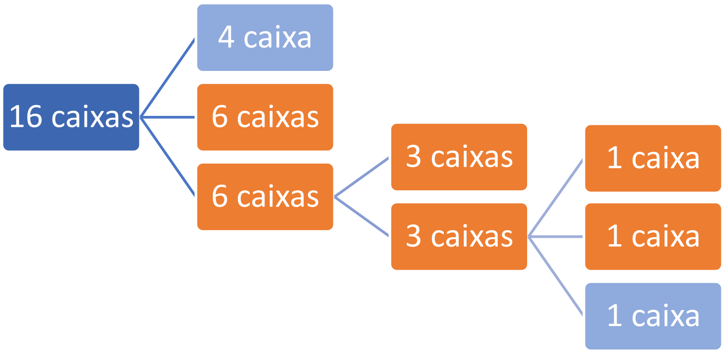
As pesagens podem ser sistematizadas no seguinte esquema para o número mínimo de pesagens:



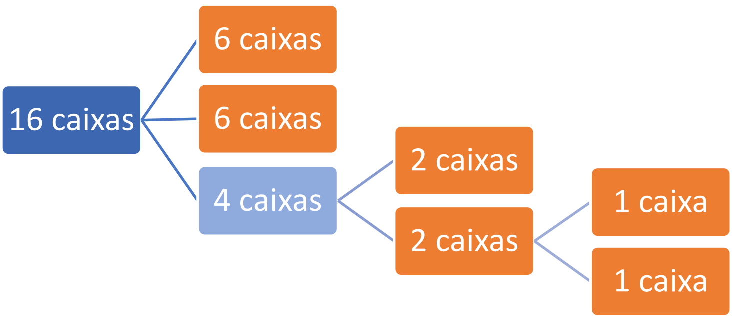
R.: 3 pesagens + 2 pesagem + 2 pesagem = 7 pesagens

E) Pesar pelo menos dois grupos com um igual número de caixas para garantir comparação entre grupos. Esta estratégia enfatiza o 16 como a decomposição de $6 + 6 + 4$.

- Fazer dois grupos com o mesmo número de caixas para que se possa eliminar através da pesagem um grupo de 4 caixas no caso de um dos grupos de 6 caixas pesar mais do que o outro, como exemplifica o esquema;



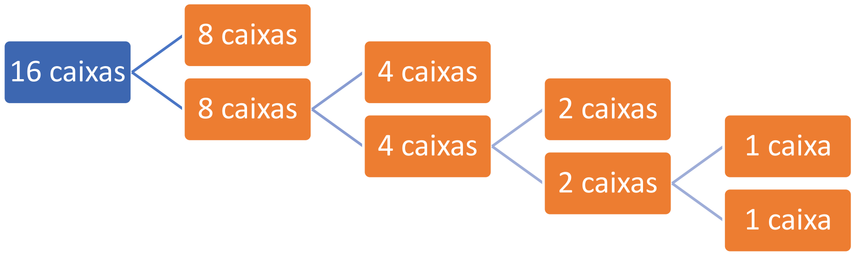
- No grupo de 6 caixas mais pesado, continuam a ser realizadas pesagens. Pode dividir-se esse grupo de 6 em dois grupos de 3 caixas. O mais pesado vai continuar a ser subdividido e pesado. Posteriormente, no grupo de 3 caixas mais pesado as caixas são pesadas individualmente não sendo necessário pesar as três caixas, mas apenas duas pois com duas pesagens é possível perceber onde está a peça de chumbo;
- Caso os dois grupos de 6 caixas tenham igual peso, então o grupo de 4 caixas vai continuar a ser pesado, como exemplifica o esquema seguinte;



- Subdividir o grupo de 4 caixas em dois grupos de 2 caixas. A pesagem vai continuar com o grupo que pesar mais;
- Pesam-se as últimas duas caixas individualmente, e
- Em qualquer um dos casos o número mínimo de pesagens é 6.

R.: 2 pesagens + 2 pesagem + 2 pesagem = 6 pesagens

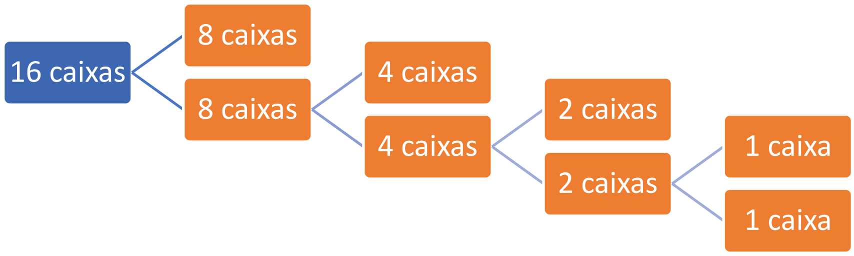
F) Fazer sempre a pesagem de metade das caixas. Esta estratégia permite usar conhecimentos sobre o dobro e a metade de um número. As pesagens podem ser sistematizadas no seguinte esquema para o número máximo de pesagens:



R.: 2 pesagens + 2 pesagem + 2 pesagem + 2 pesagem = 8 pesagens

Estratégia com balança de pratos

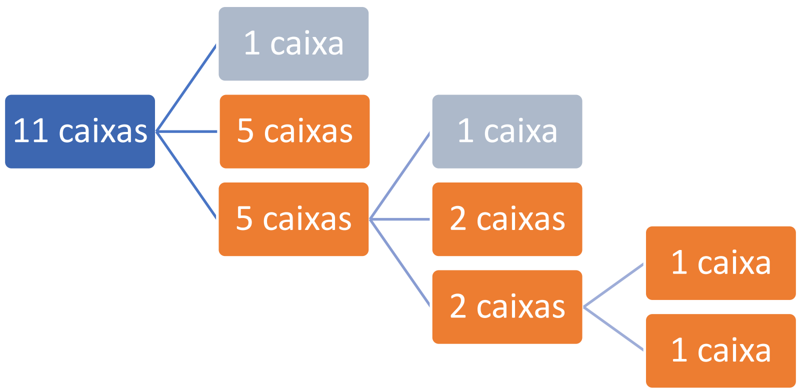
Caso se utilize uma balança de pratos, a estratégia de dividir em dois grupos de caixas iguais é a mais adequada, pois em cada pesagem comparam-se os dois grupos e um deles é eliminado. Neste caso fazem-se apenas 4 pesagens.



R.: 1 pesagem + 1 pesagem + 1 pesagem + 1 pesagem = 4 pesagens

Sempre que o número de caixas é uma potência de base 2 é possível relacionar o número de pesagens com o expoente da potência. Para qualquer número de caixas que seja potência de base 2, o número de pesagens é igual ao expoente da potência.

Ainda utilizando uma balança de pratos, é possível realizar esta experiência com qualquer número de caixas. Por exemplo, no caso de qualquer número entre 8 (2^3) e 16 (2^4) (exclusive), o número de pesagens é 3. Caso o número de caixas não seja uma potência de base 2, em algum momento da divisão de caixas por grupos vai surgir um número ímpar de caixas. Nesta situação e tendo presente que um número ímpar é a soma de um número par com 1 ($2k + 1$), retira-se uma caixa e realiza-se a pesagem de dois grupos com igual número de caixas, como se exemplifica no esquema seguinte para um número total de 11 caixas:



R.: 1 pesagem + 1 pesagem + 1 pesagem = 3 pesagens

O GATO DA JOANA

Tarefa

A Joana gosta de construir figuras com blocos padrão e encontrou uma forma interessante de desafiar os seus colegas. A Joana cria as suas figuras, mas depois só apresenta o contorno da figura aos colegas. Os colegas têm de descobrir que peças usou a Joana na sua figura.

Parte I

1. A Joana pode usar as peças que se apresentam a seguir:

1.1. Descobre diferentes formas de construir a figura 1.

Podes registar as tuas soluções usando:

- blocos padrão manipuláveis e malha triangular;
- aplicação do Math Playground (https://www.mathplayground.com/pattern-blocks.html) e guardar as tuas soluções num documento digital.

Figura 1

Parte II

2. Observa as composições que construíste na Parte I da tarefa e responde às questões:

   2.1. Seleciona a figura onde usaste o menor número de peças. Será possível construir outra figura com um número menor de peças do que as que usaste? Regista a tua construção e justifica como pensaste.

   2.2. Seleciona a figura onde usaste o maior número de peças. Será possível construir outra figura com um número maior de peças do que as que usaste? Regista a tua construção e justifica como pensaste.

   2.3. Indica as figuras que usaste nas tuas construções e descreve possíveis relações entre essas peças.

   2.4. Foi possível usar todas as peças dos blocos padrão no preenchimento da figura 1? Justifica a tua resposta. (sugestão de questão apenas a partir do 3.º ano)

Guião de exploração

Breve apresentação

Esta tarefa envolve composição e decomposição de figuras. Visa também o reconhecimento de padrões e relações nessas composições/decomposições, que permitem a construção e comparação de diferentes soluções para a composição de uma dada figura. A tarefa pode ser realizada com recurso a materiais manipuláveis ou de forma interativa através de um recurso digital, a partir do 1.º ano. A realização e discussão das partes I e II desta tarefa tem um tempo previsto de 100 minutos.

Enquadramento Curricular

Matemática

Capacidades matemáticas:

- Raciocínio (Conjeturar e justificar)
- Comunicação (Expressão e discussão de ideias)
- Pensamento computacional (Abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e depuração)

Tema matemático: Geometria e medida

Tópicos/subtópicos:

- Operações com figuras: Composição e decomposição
- Figuras planas: Ângulos

Objetivos de aprendizagem

- Construir, representar e comparar figuras planas compostas
- Compreender o conceito de ângulo e identificar ângulos retos, rasos, agudos, obtusos e giros, estabelecendo conexões matemáticas com outras áreas do saber

Orientações curriculares TIC

- Identificar e resolver problemas matemáticos simples, com apoio em ferramentas digitais

Recursos

- Enunciado da tarefa
- Blocos padrão manipuláveis ou virtuais (disponíveis em https://www.mathplayground.com/pattern-blocks.html)
- Folha de registo (papel triangulado isométrico – Anexo 1, ou papel ponteado isométrico – Anexo 2)

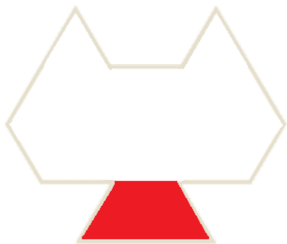
Orientações para a exploração

O professor inicia a aula com a introdução da tarefa, desafiando os alunos a realizarem a Parte I autonomamente, a pares ou em pequenos grupos. O tempo estimado para esse momento de trabalho é de 30 minutos.

Na Parte I da tarefa, os alunos podem preencher a figura 1 como um puzzle sem usarem qualquer tipo de estratégia organizada. Neste sentido, qualquer uma das soluções apresentadas a seguir pode ser construída pelos alunos. Os alunos devem usar material manipulável ou virtual para fazer experiências e compor a figura a partir das peças dos blocos padrão. Devem registar as suas descobertas numa folha branca, papel triangulado isométrico ou em papel ponteado isométrico (Anexos 1 e 2 da tarefa).

Os alunos devem gradualmente definir estratégias para a construção da figura. Observando a figura, podem identificar partes por onde possam iniciar facilmente o seu preenchimento. Iniciar, por exemplo, pelas orelhas com triângulos equiláteros verdes ou com um trapézio vermelho na parte inferior da figura.

Abstração
Centrar a atenção em pormenores da figura, com o fim de escolher uma determinada peça para iniciar a construção.



Caso isto não aconteça, o professor deve recorrer ao questionamento, de modo a centrar a atenção do aluno em pormenores importantes da figura: “Por onde podes começar a construir a figura?”, “Que peças podes escolher para começar a construir a figura?”.

Decomposição
Decompor a figura em partes para facilitar o seu preenchimento.

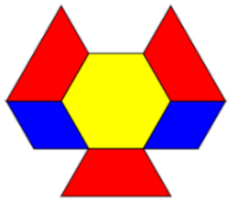
A Parte II, que deve ser entregue aos alunos após o trabalho realizado na Parte I, introduz a necessidade de explorar a composição e decomposição da figura de forma mais organizada e estabelecendo relações. Os alunos devem encontrar outras soluções e registá-las na sua folha de registo. Caso este registo não seja realizado de forma organizada, o professor deve sugeri-lo. É importante perceber a particular relevância do triângulo (figura que pode compor/decompor todas as outras).

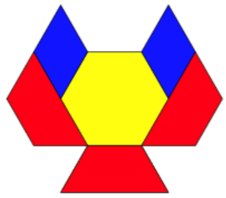
Na questão 2.1, sobre o menor número de peças, o aluno deve abstrair-se das peças com menor área e usar as de maior, percebendo que isso permite a utilização de menos peças. Contudo, a exclusiva utilização da peça de maior área não permite a construção da figura, sendo necessárias a utilização de outras peças, devendo igualmente verificar a possibilidade de utilização das peças de maior área possível. Na questão 2.2, sobre o maior número de peças, deve perceber que a peça com menor área exige um maior número de peças para compor a figura. Assim, para construir a figura com o menor número de peças, procura-se usar o maior número de peças

Abstração
Centrar a atenção em peças com a maior/menor área.

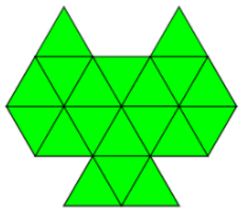
possível das com maior área e para construir a figura com maior número de peças, usam-se as peças de menor área.

Construção da figura com o menor número de peças possível (6 peças):





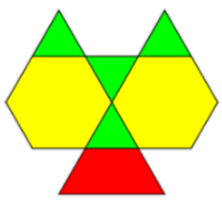
Com o maior número de peças possível (19 peças):

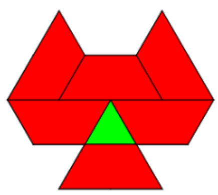


Também nesta fase do trabalho de exploração dos alunos, o questionamento do professor é importante: “Em vez de usares o losango azul, que outra peça podes usar?”, “Que peças podes escolher para fazer uma construção com o menor número de peças e porquê?”, “Que peças podes escolher para fazer uma construção com o maior número de peças e porquê?”.

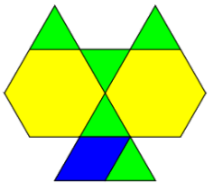
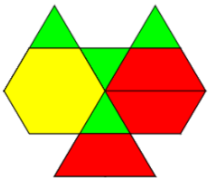
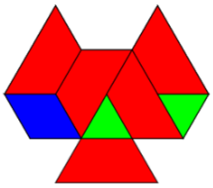
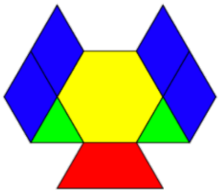
Entre a construção com o maior e a construção com o menor número de peças, existem muitas possibilidades para a construção de figuras com o mesmo número de peças, usando o mesmo tipo de peças em diferentes disposições ou diferentes tipos de peças, como se mostra a seguir através de alguns exemplos.

Com 7 peças:

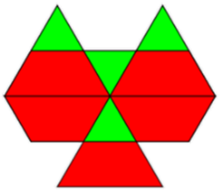
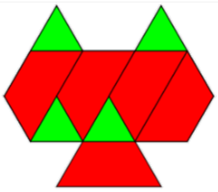
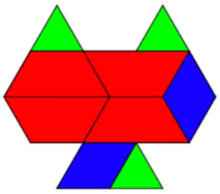


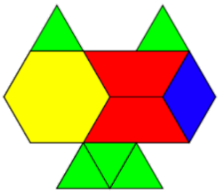
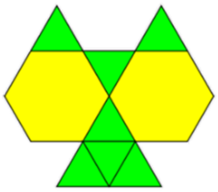
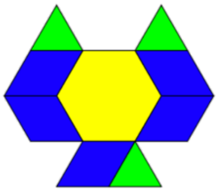


Com 8 peças:

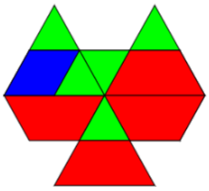
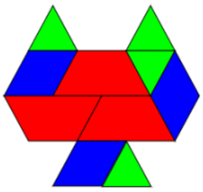
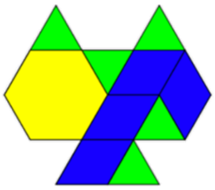
   

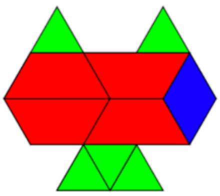
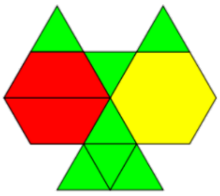
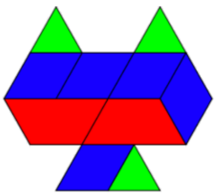
Com 9 peças:

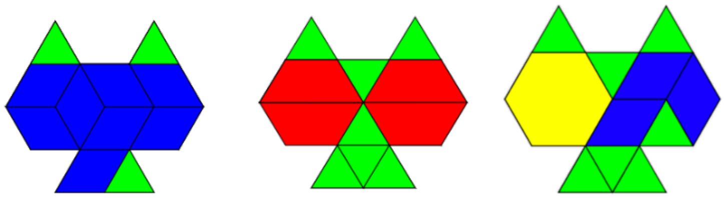
  

Com 10 peças:

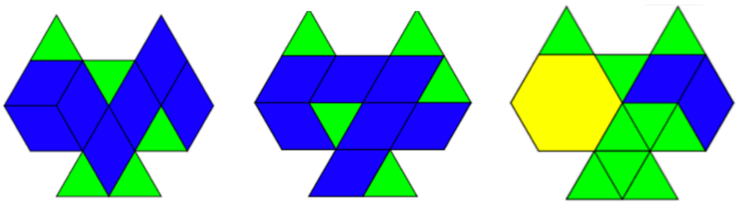
  

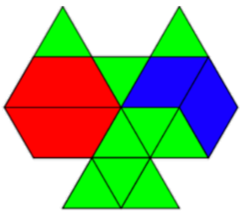
Com 11 peças:



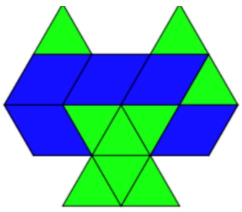
Com 12 peças:



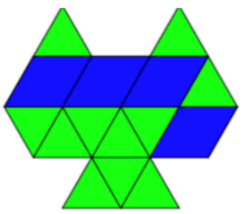
Com 13 peças



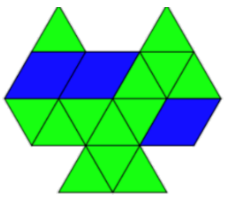
Com 14 peças:



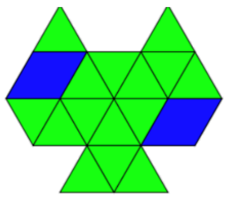
Com 15 peças:



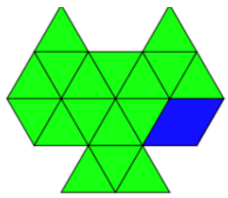
Com 16 peças:



Com 17 peças:



Com 18 peças:



A questão 2.3, permite discutir e sistematizar algumas ideias acerca destas possibilidades, que surgem a partir das relações que se estabelecem entre as peças. Os alunos podem criar outras composições através da substituição de peças na figura com maior ou menor número de peças (e.g., em vez de usar um losango azul, usam dois triângulos verdes ou vice-versa). A visualização desta relação entre peças, pode ser feita através da sua sobreposição. Podem encontrar padrões na construção através da composição e decomposição de figuras, usando a relação entre peças, e usar isso

Reconhecimento de padrões
Reconhecer e usar a relação entre peças.

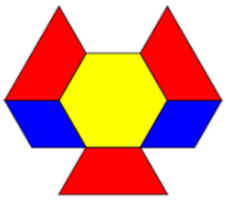
para construir a figura da Joana. Por exemplo, os alunos devem perceber que o hexágono, o losango azul e o trapézio vermelho podem ser construídos a partir dos triângulos e que isto permite criar um maior número de possibilidades; que ao substituir o hexágono por dois trapézios vermelhos se aumenta o número de peças, e quando usam as peças de maior área precisam de menos peças e vice-versa.

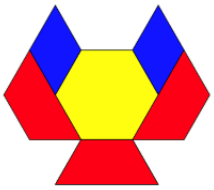
O professor deve desafiar os alunos a construírem outras figuras a partir da decomposição das peças usadas em composições anteriores e o seu questionamento deve incentivar a descoberta de relações entre peças, a produção de conjeturas e a justificação de raciocínios por parte dos alunos: “Se quiseres ter mais do que 6 peças, que outras peças podes usar?”, “Poderás usar só trapézios vermelhos na construção da figura? E só hexágonos? E losangos azuis?”.

O reconhecimento de padrões permite mobilizar e discutir conhecimentos sobre propriedades das figuras (e.g., medida do comprimento dos lados e ângulos), composição e decomposição de figuras planas, pavimentações, etc.

Depuração
Analisar soluções para eliminar figuras iguais e construir outras figuras diferentes.

As duas figuras que se apresentam a seguir são compostas pelo mesmo tipo de peças, mas como estamos a analisar a composição e não apenas o contorno da figura, o facto do mesmo tipo de peça se encontrar em posições diferentes da figura, faz com que estas figuras também sejam diferentes:





No que se refere à questão 2.4 (sugestão de abordagem a partir do 3.º ano), os alunos têm disponíveis as 6 peças dos blocos padrão, mas vão perceber que nesta figura não é possível usar o quadrado e o losango bege. Na discussão, o professor deve explorar a razão pela qual estas figuras não podem ser usadas. Estas razões relacionam-se essencialmente com a medida da amplitude dos ângulos internos das figuras, que não permitem a pavimentação da figura da Joana. A noção de ângulo reto é introduzida no 2.º ano de escolaridade, pelo que esta discussão é possível por comparação com o ângulo de 90°, mesmo que não se especifiquem outras amplitudes. A partir do 3.º ano já é possível discutir o tipo de ângulos internos das figuras (e.g., retos, agudos ou obtusos) e perceber que as peças, usadas na construção da figura da Joana, e que se relacionam têm ângulos de 60° e de 120°, enquanto o quadrado tem ângulos de 90° e o losango bege ângulos de 30° e 150°. Por esta razão, não é possível o recurso ao quadrado e ao losango bege para preencher a figura pedida.

Abstração
Relacionar a medida da amplitude de ângulos por comparação entre peças.

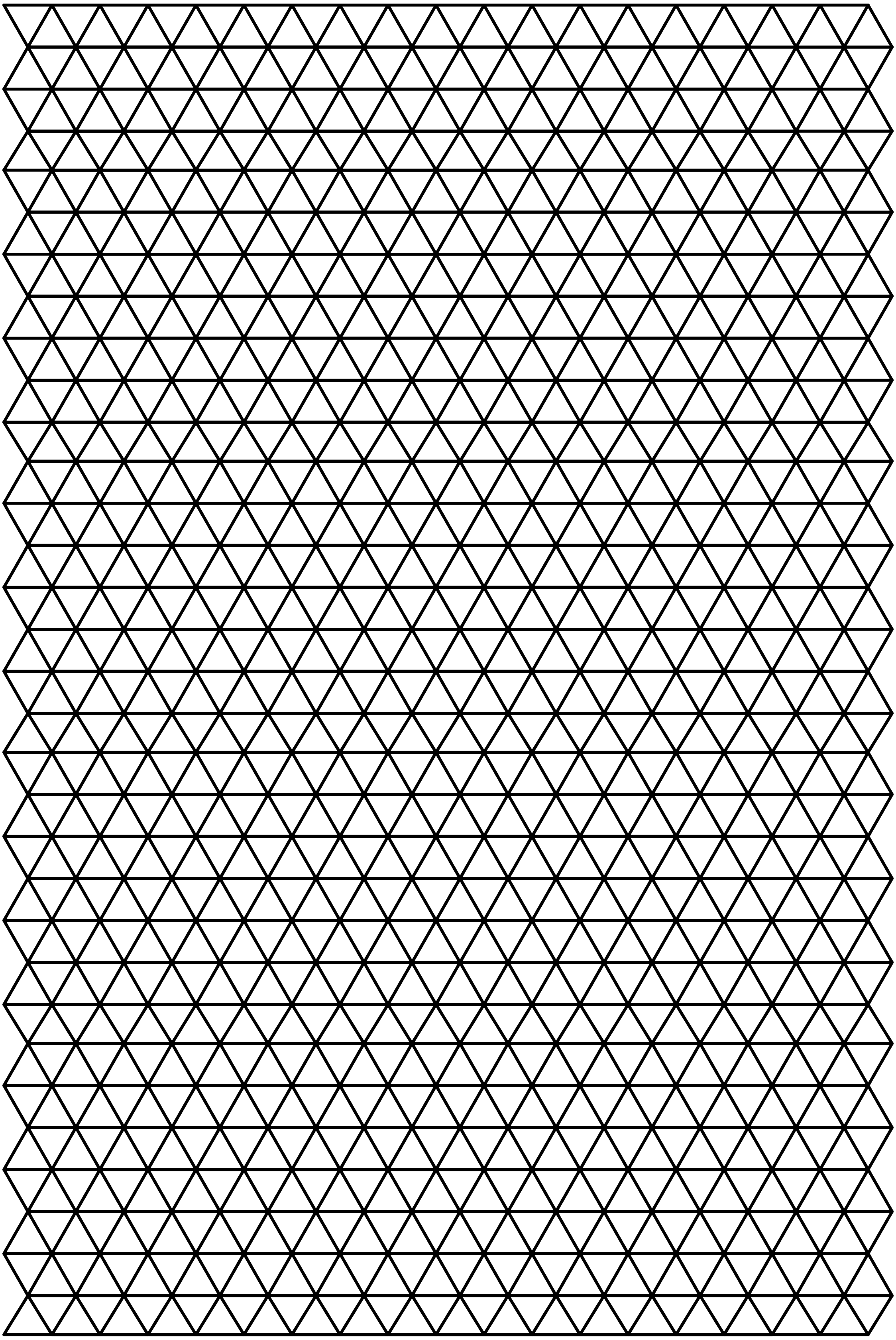
Na discussão coletiva, o professor pode organizar as composições encontradas pelos alunos na turma e/ou sugerir que os alunos recortem as figuras construídas na folha de registo e as colem no caderno por número crescente de peças que constituem o gato da Joana. A organização do trabalho dos alunos vai ajudá-los a perceber se existem figuras repetidas. Esta perceção deve ter subjacente as propriedades das figuras referidas anteriormente. Podem contar o número de peças que compõem a figura pedida ou observar a cor das peças usadas para verificar se existem figuras repetidas.

Depuração
Analisar soluções para eliminar figuras iguais e construir outras figuras diferentes.

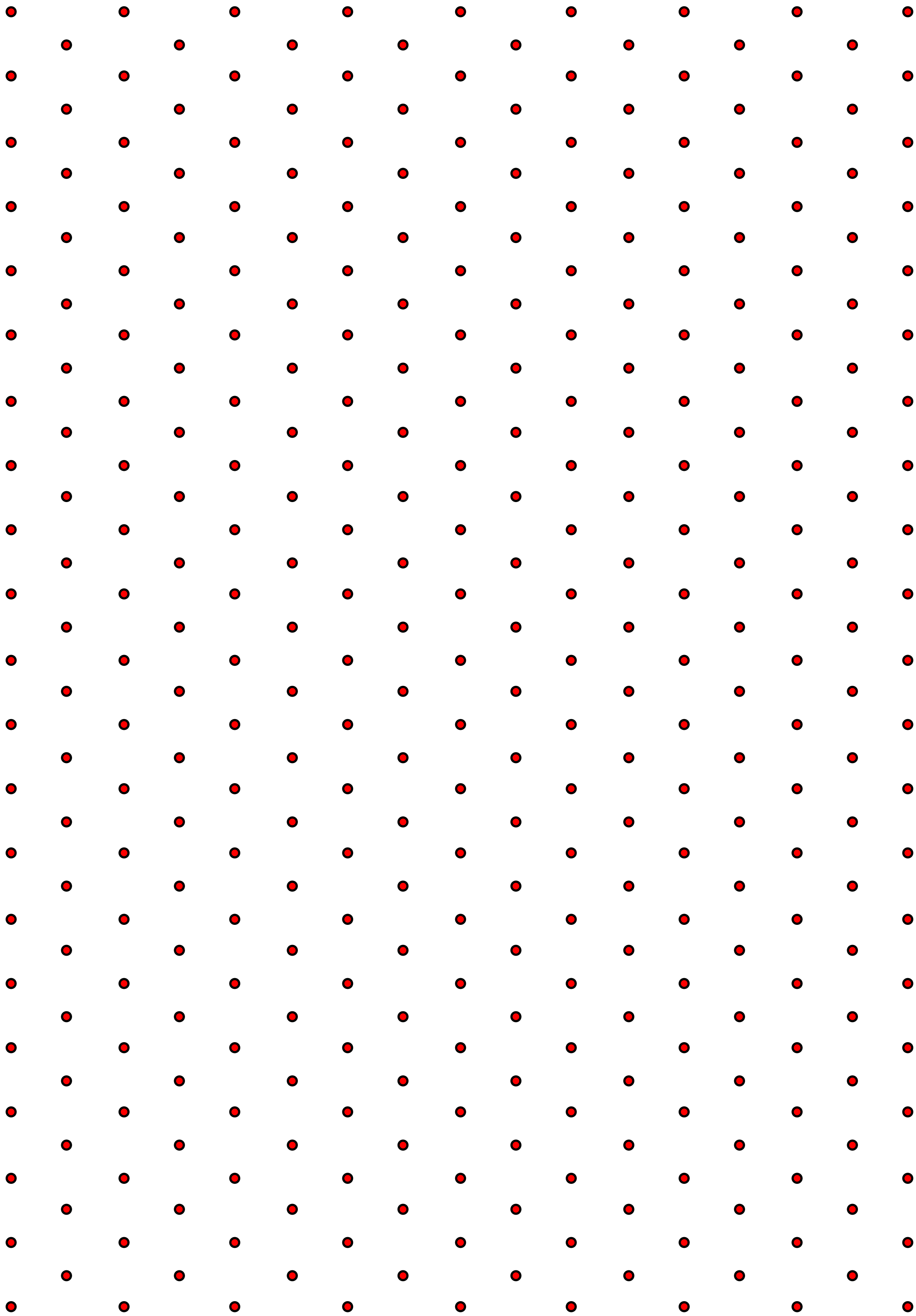
Na sistematização de ideias, deve realçar-se que:

- É possível compor e decompor figuras estabelecendo relações entre peças;
- É possível relacionar figuras quando estas têm algo em comum, nomeadamente a medida do comprimento dos lados, a medida de área ou a medida de amplitude dos ângulos (a partir do 3.º ano).

Gato da Joana Anexo 1 – Papel triangulado isométrico



Gato da Joana Anexo 2 – Papel ponteado isométrico



ROBÔ DIGITAL

Tarefa

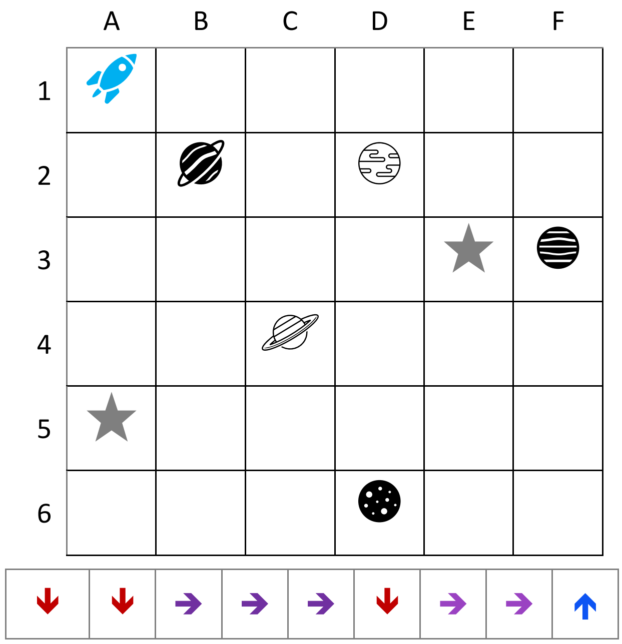
1. Vais realizar um jogo *online* com o objetivo de programar o caminho que o robô tem de seguir para ir até ao *alien* que tem de salvar.

   Realiza o jogo da Math Playground de acesso livre *online*:
   https://www.mathplayground.com/code_builder.html

2. Agora que já sabes como funcionam os desafios, tens um novo jogo. Neste jogo há um foguetão que pretende visitar um planeta, sem passar nas quadriculas com outros planetas ou estrelas.

   2.1. Analisa os tabuleiros que te são dados e a programação que o foguetão faz para ir até um planeta. Em cada tabuleiro descobre o planeta que o foguetão vai visitar e indica a sua posição (Letra, Número).

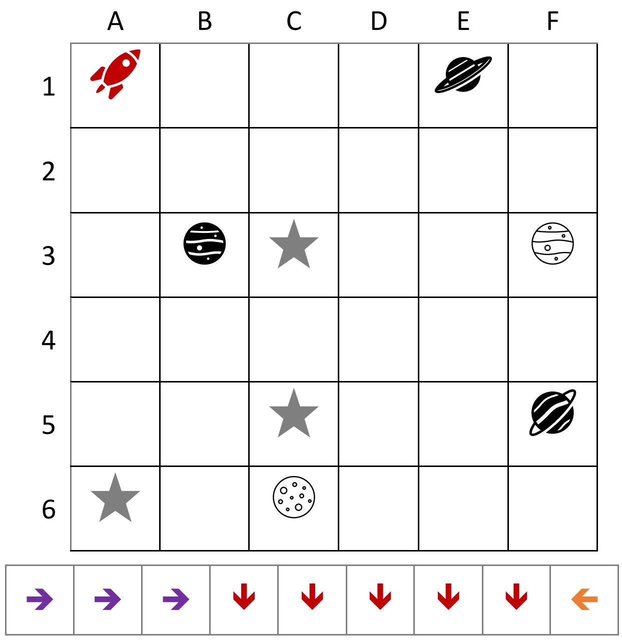
Tabuleiro A



Posição do planeta

_____ _____

Tabuleiro B



Posição do planeta

_____ _____

2.2. Em cada um dos tabuleiros da questão 2.1., verifica se é possível o foguetão fazer o seu percurso até ao planeta que quer visitar usando menos comandos. Se tal for possível, escreve a respetiva linha de comandos.

Guião de exploração

Breve apresentação

Esta tarefa envolve trabalho no âmbito da orientação espacial. Visa levar os alunos a identificar percursos e posições, centrando-se na informação que é essencial. A utilização do jogo pretende tornar tangíveis os movimentos que são definidos pelos alunos para levar o robô ou foguetão a alcançar uma dada posição. Esta tarefa pode ser proposta a alunos a partir do 3.º ano.

A tarefa tem um tempo previsto de 60 minutos para a sua realização e discussão.

Enquadramento Curricular

Matemática

Capacidades matemáticas:

- Comunicação (Expressão e discussão de ideias)
- Pensamento computacional (Abstração, algoritmia e depuração)

Tema matemático: Geometria e Medida

Tópicos/subtópicos:

- Orientação espacial: Mapas e coordenadas no plano

Objetivos de aprendizagem

- Descrever posições recorrendo à identificação de coordenadas, comunicando de forma fluente
- Ler e utilizar mapas ou vistas aéreas, estabelecendo conexões matemáticas com a realidade

Orientações curriculares TIC

- Desenvolver atividades de orientação, lateralidade e noções espaciais, através da movimentação de objetos virtuais ou tangíveis, em cenários e em interação com o seu contexto de forma criativa e inovadora
- Resolver desafios através da programação de objetos tangíveis

Recursos

- Enunciado da tarefa
- Computador com acesso à internet para aceder à aplicação *online* https://www.mathplayground.com/code_builder.html

Orientações para a exploração

Os alunos podem realizar o jogo da questão 1. na aplicação no computador ou tablet. Podem ser organizados em pares, alterando a sua vez de jogar, ou jogar de modo individual. Devem conseguir identificar a posição inicial do robô em cada jogada, o *alien* que pretendem alcançar e a sua posição no quadriculado. O *alien* a salvar está indicado no retângulo cor de laranja do robô grande à direita do ecrã de jogo. Devem depois começar a definir um percurso para alcançar esse *alien*, evitando as rochas e outros *alien* que estão em algumas quadriculas. É importante que tenham atenção ao objetivo do desafio e evitar obstáculos para não perderem vidas do robô.

Abstração
Identificar o objetivo do jogo e focar a atenção na posição dos elementos essenciais para atingir esse objetivo.

O robô desloca-se em duas direções, horizontal e vertical e nos dois sentidos em cada direção (direita, esquerda, cima, baixo), tal como apresentam as opções de comando (setas) disponíveis para o robô. Os alunos devem deslocar as setas que entendem ser necessárias para a linha de programação de acordo com o itinerário a realizar para o robô se deslocar até ao *alien* que tem de salvar. Sempre que se acede pela primeira vez à aplicação, o robô que vai fazer o salvamento encontra-se no canto superior esquerdo. O robô inicia com três vidas, sendo que as ainda disponíveis estão indicadas no canto inferior direito. A aplicação permite tornar tangível a linha de programação que é definida pelo aluno. Carregando em *Run* a aplicação testa essa programação e verifica se o objetivo de alcançar o *alien* indicado é atingido. Caso não o tenha sido, os alunos devem identificar o movimento incorreto e proceder a alterações para corrigir o erro. Quando cometem um erro perdem uma vida, mas se ainda lhes restarem vidas podem voltar a introduzir os comandos a fim de conseguirem uma solução correta.

Depuração
Procurar e corrigir erros, testar a resolução.

Os alunos podem jogar sucessivamente enquanto tiverem vidas disponíveis, sendo que sempre que completam corretamente um percurso podem carregar em *Next* para surgir um novo desafio. A cada jogada, o robô mantém a posição no tabuleiro da jogada anterior, mas é alterada a disposição dos obstáculos e dos *aliens*. Surge também a indicação de um novo *alien* a salvar.

O professor pode sugerir que os alunos realizem 4 ou 5 jogadas ou pode definir um tempo limite de jogo (por exemplo 10 minutos) de modo a promover o trabalho autónomo dos alunos e a garantir que na aula há momentos significativos de discussão e partilha de ideias. De modo a apoiar a discussão com os alunos, o professor pode projetar alguns exemplos. É possível discutir em algumas situações outras possibilidades de programação e, por vezes, é também possível discutir a existência de outros caminhos, mas que não são os caminhos mais curtos.

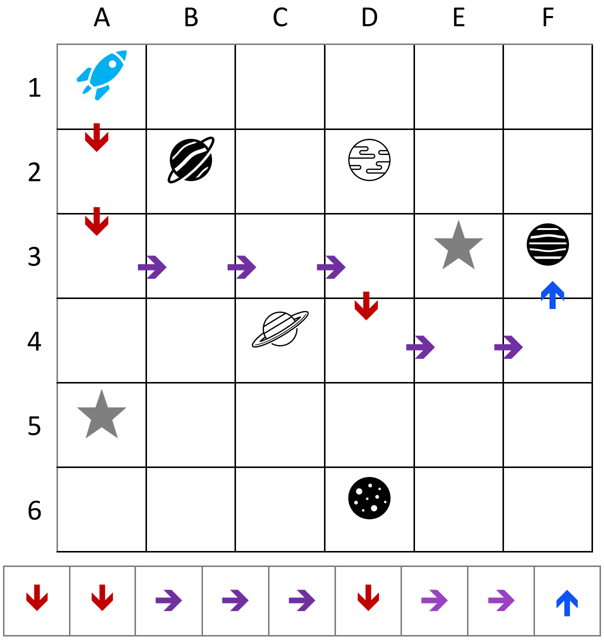
Na questão 2., os alunos têm de analisar a linha de programação dada e identificar no quadriculado os movimentos correspondentes para descobrirem a posição do planeta que o foguetão quer visitar. É importante que considerem todas as indicações para se dirigirem ao local correto. Os obstáculos, os planetas e as estrelas condicionam o percurso que é dado, mas para o trabalho dos alunos o que é essencial é a linha de programação dada e a sua interpretação. Esta situação cria a oportunidade dos alunos

Abstração
Analisar a programação dada e o tabuleiro, cruzando a informação de ambos.

indicarem posições recorrendo à identificação de coordenadas, tratando-se de um par composto por uma letra e por um número.

Esta questão, tal como é dada na tarefa, não torna tangíveis os movimentos a fim de se confirmar o percurso do foguetão desde a sua posição inicial até ao planeta que pretende visitar. Contudo, ainda que de modo manual, cada percurso pode ser representado, como se exemplifica a seguir, o que pode apoiar a discussão com os alunos após o seu trabalho autónomo. O professor pode encontrar outros modos dos alunos partilharem o seu trabalho e as suas ideias, no momento de discussão coletiva.

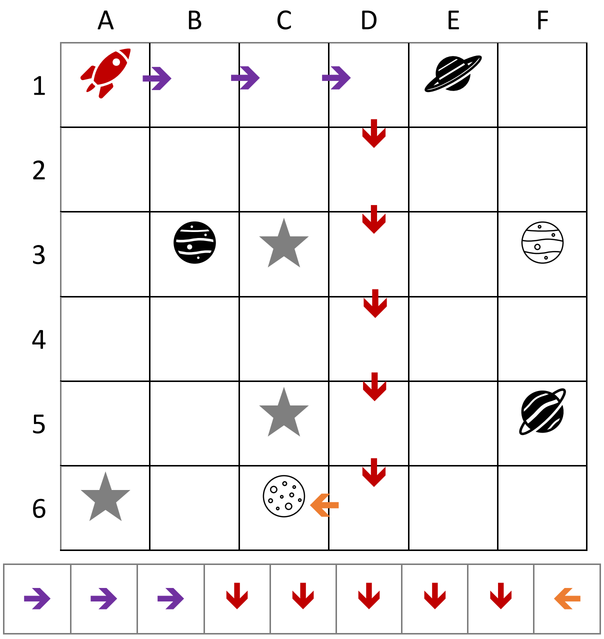
Tabuleiro A



Posição do planeta

F 3

Tabuleiro B



Posição do planeta

C 6

No âmbito do seu trabalho autónomo, os alunos devem ainda analisar outros percursos que levem o foguetão ao mesmo local, mas que envolvam um menor número de comandos, em cada uma das situações. Aqui surge a oportunidade de estudar itinerários alternativos, com o propósito de encontrar um trajeto mais curto para ir de uma posição a outra posição dadas.

Depuração
Refinar e otimizar uma dada resolução, propondo novos percursos com menor número de comandos.

Os alunos devem ser incentivados a escrever a respetiva linha de comandos que representa as instruções a dar ao foguetão para a realização do percurso que o leva ao planeta pretendido. Apresenta-se em seguida um exemplo de resposta para cada um dos tabuleiros. No caso do tabuleiro A podem ser utilizados menos dois comandos, ou seja, fazer um percurso com apenas sete movimento. Também no caso do tabuleiro B é possível chegar ao planeta a visitar por um novo percurso que requer sete movimentos, ou seja, menos dois do que os inicialmente dados.

Algoritmia
Desenvolver o procedimento passo a passo para conduzir o foguetão até ao planeta.

Tabuleiro A

→	→	→	→	→	↓	↓		

Tabuleiro B

↓	↓	↓	↓	→	↓	→		

Sugestões de extensão

Além do que é proposto na tarefa, é possível utilizar outros recursos, como sendo objetos tangíveis que estejam disponíveis, sendo necessário para tal um tabuleiro vazio e imagens ou objetos que simulem os obstáculos, os *aliens* ou os planetas. Assim, caso existam recursos na escola, é possível criar o quadriculado com desafios idênticos ao facultado na aplicação Math Playground ou aos que são dados na questão 2 da tarefa e utilizar um objeto robótico simples, como o Robot DOC da Clementoni® ou outro equivalente, para os alunos introduzirem as instruções e o objeto tangível realizar o percurso definido. Contudo, nesta situação é preciso atender às particularidades do objeto tangível, nomeadamente no que respeita à medida do comprimento do seu movimento em frente (ou para trás) que deve ser considerado na construção do quadriculado. Um outro aspeto relevante a ter em conta, são as mudanças de direção. Quando se pretende que o objeto tangível siga numa direção perpendicular aquela em que se estava a movimentar é preciso, primeiro, indicar-lhe que deve rodar um quarto de volta (à direita ou à esquerda) e de seguida ser indicados os passos que deve dar nessa direção, no sentido em frente ou no sentido oposto. No objeto robótico simples o comando para alterar a direção, para um quarto de volta à direita ou à esquerda, não envolve o movimento de seguir em frente após essa alteração de direção. Este aspeto é diferente do da aplicação e das indicações da questão 2. que não necessitam de um comando para fazer a rotação do objeto e outro para se deslocar nessa direção, bastando um comando para sua deslocação numa nova direção.

No caso de ser possível concretizar o jogo com um tabuleiro na sala de aula e um objeto robótico, os alunos podem jogar a pares, jogando um enquanto o outro verifica a adequação da programação definida pelo colega. Cada situação deve visar a exploração de ideias matemáticas significativas, que se tornem evidentes para os alunos, fomentando a reflexão dos alunos em torno dessas aprendizagens.

TETRAMINÓS

Tarefa

Parte I

1. Tetraminós são polígonos possíveis de serem formados por quatro quadrados iguais que se juntam pelos lados. Em pares, construam todas as figuras diferentes possíveis. Não contem como diferentes as figuras que se podem obter a partir de outras por rotação, reflexão ou translação.

   Podem utilizar um dos seguintes recursos:

   - quadriculado em papel para desenharem os tetraminós;
   - geoplano da aplicação disponível em https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/ para representarem cada tetraminó com um elástico. Usem o geoplano retangular e as linhas da grelha .
   - peças quadrangulares da aplicação disponível em https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/ para construir os tetraminós.

1.1. Indiquem o número de tetraminós que descobriram.

1.2. Coloquem aqui uma imagem dos tetraminós que construíram (Podem colar aqui o papel quadriculado onde desenharam os tetraminós ou uma imagem do trabalho que fizeram no computador):

2. Indiquem o que têm em comum os vários tetraminós.

Parte II

1. Representa cada um dos tetraminós sobre o tabuleiro, usando quatro quadrados de papel iguais, como mostra a figura 1 em relação ao retângulo.

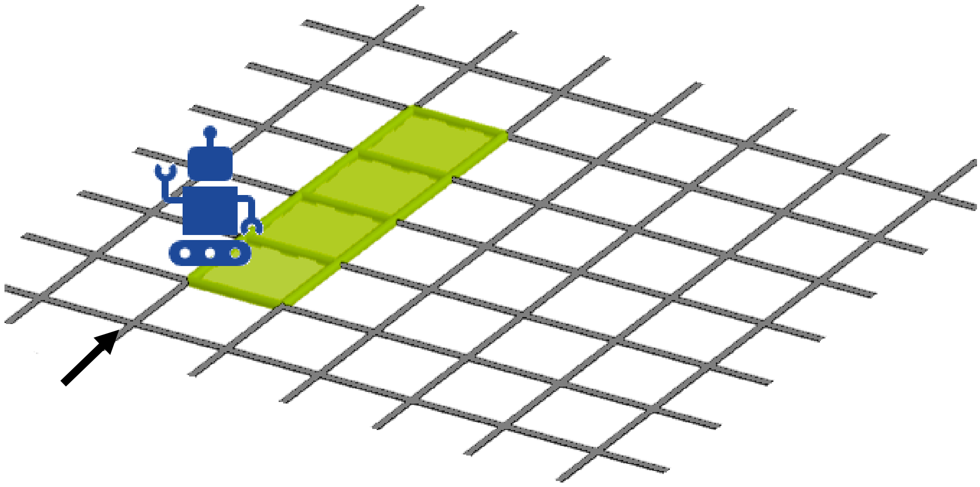
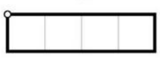


Figura 1. Tabuleiro com quadriculas para movimentação do objeto tangível com exemplo do retângulo.

2. Programa o robô para passar sobre a linha de fronteira em cada um dos tetraminós representados.

2.1. Quantos passos o robô tem de dar em cada um dos tetraminós?
Vamos considerar a medida do comprimento do lado do quadrado como uma unidade de medida de comprimento. O total de passos para percorrer a linha de fronteira corresponde ao perímetro do tetraminó.

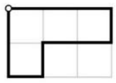
Regista os valores do perímetro de cada figura:

Tetraminós	Faz os registos necessários para explicares como obtiveste o valor do perímetro:
1 	P = ______

Tetraminós

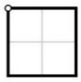
Faz os registos necessários para explicar como obtiveste o valor do perímetro:

②



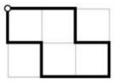
P = ______

③



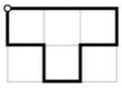
P = ______

④



P = ______

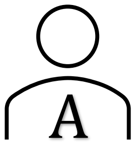
⑤



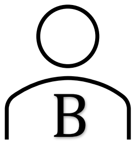
P = ______

Parte IIIA

1. Esta tarefa é realizada a pares. Cada um tem funções específicas neste desafio. Registem os vossos nomes:

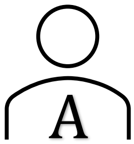


Nome: ___________________



Nome: _________________

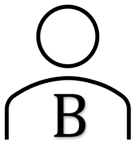
2. Cada um vai receber cinco cartas diferentes. Devem fazer as tarefas seguintes para cada carta:



Vais receber cartas que têm um tetraminó desenhado.

Em cada uma das figuras numeradas de 1 a 5 posiciona-te no sentido que mostra a figura abaixo.

Dá as instruções para a construção de cada um dos tetraminós ao aluno B a partir do ponto assinalado.



Vais receber cartas com um quadriculado vazio, apenas com a indicação do ponto a partir do qual deves começar a desenhar o tetraminó.
Em cada uma das figuras numeradas de 1 a 5 posiciona-te no sentido que mostra a figura abaixo.

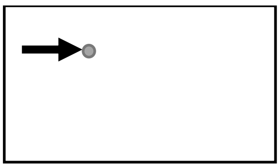
Desenha cada um dos tetraminós de acordo com as indicações do aluno A.

Só podem ser dadas instruções de:

Um quarto de volta à esquerda: ↰:

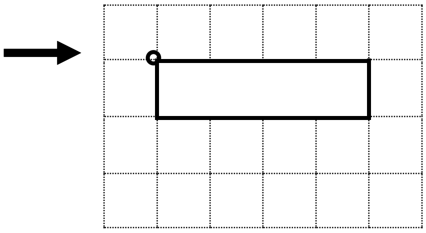
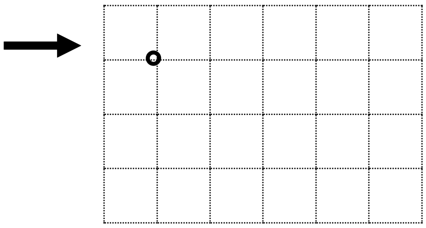
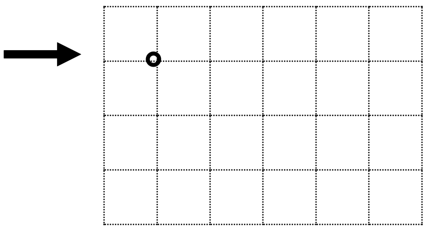
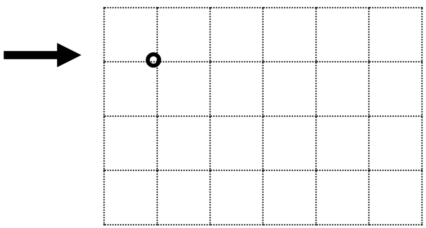
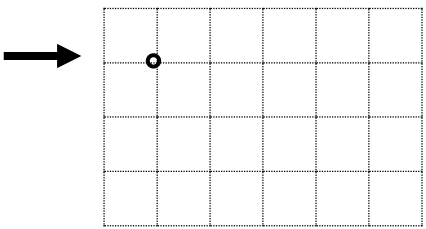
Um quarto de volta à direita: ↱

Em frente: ↑



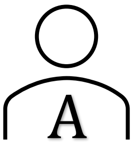
3. Após concluírem cada uma das construções, mostrem ambos os cartões e comparem os desenhos. Indiquem se desenharam figuras iguais ou se é necessário fazer correções.

4. Em conjunto, para cada figura, escrevam os movimentos realizados, usando os símbolos como mostra o exemplo para o tetraminó 1:

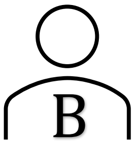
Tetraminós	Movimentos
① 	*Indicações para desenhar o retângulo e voltar à posição inicial:* 4↑ 1↱ 1↑ 1↱ 4↑ 1↱ 1↑ 1↱
② 	
③ 	
④ 	
⑤ 	

Parte IIIB

1. Esta tarefa é realizada a pares. Cada um tem funções específicas neste desafio. Registem os vossos nomes:

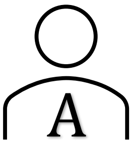


Nome: ___________________



Nome: _________________

2. Ambos devem entrar no link https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/ e fazer o que é indicado a seguir. Na  cada um vai introduzir a respetiva chave de acesso:

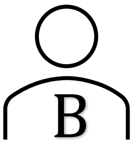


 10EB-ZJ1M

Vais ter acesso a um conjunto de tetraminós desenhados num geoplano virtual.

Em cada uma das figuras numeradas de 1 a 5 posiciona-te no sentido que mostra a figura abaixo.

Dá as instruções para a construção de cada um dos tetraminós ao aluno B a partir do ponto assinalado.



 XFCB-5WUY

Vais ter acesso a um geoplano vazio, apenas com a indicação do ponto a partir do qual deves começar a desenhar cada tetraminó.

Em cada uma das figuras numeradas de 1 a 5 posiciona-te no sentido que mostra a figura abaixo.

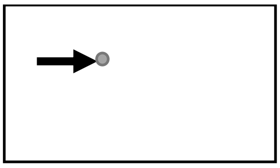
Usa a ferramenta  e depois  para desenhar cada um dos tetraminós de acordo com as indicações do aluno A.

Só podem ser dadas instruções de:

Um quarto de volta à esquerda: ↰

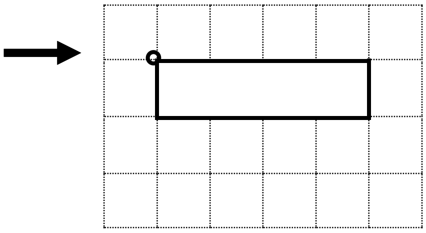
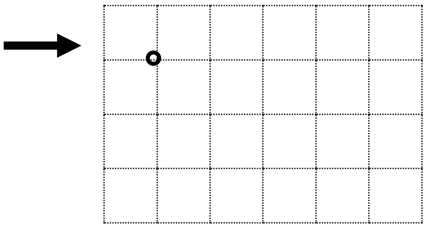
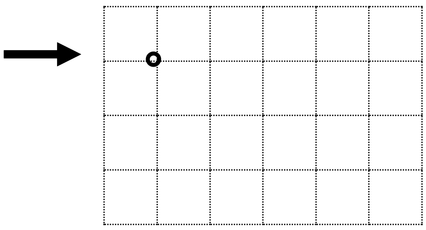
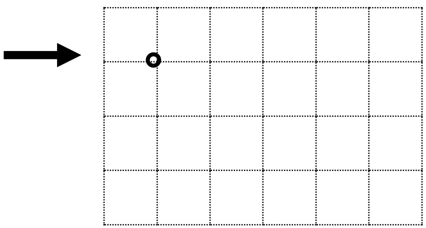
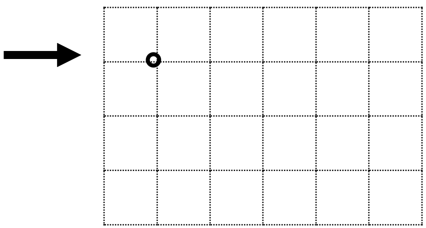
Um quarto de volta à direita: ↱

Em frente: ↑



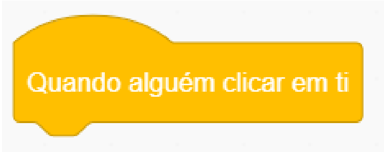
3. Após concluírem as construções, mostrem ambos os geoplanos e comparem os desenhos. Indiquem se se desenharam figuras iguais ou se é necessário fazer correções.

4. Em conjunto, para cada figura, escrevam os movimentos realizados, usando os símbolos como mostra o exemplo para o tetraminó 1:

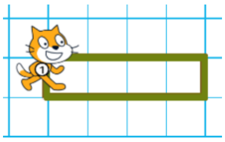
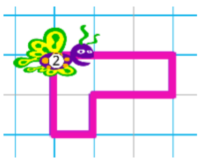
Tetraminós	Movimentos
① 	*Indicações para desenhar o retângulo e voltar à posição inicial:* 4↑ 1↱ 1↑ 1↱ 4↑ 1↱ 1↑ 1↱
② 	
③ 	
④ 	
⑤ 	

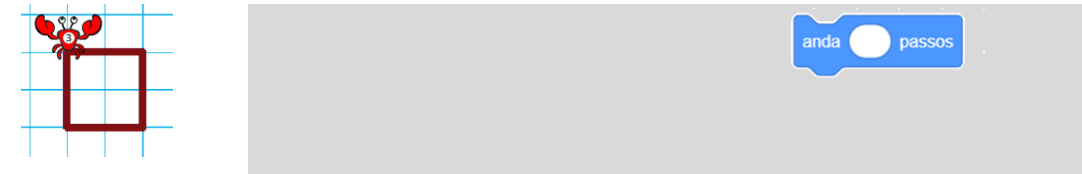
Parte IV

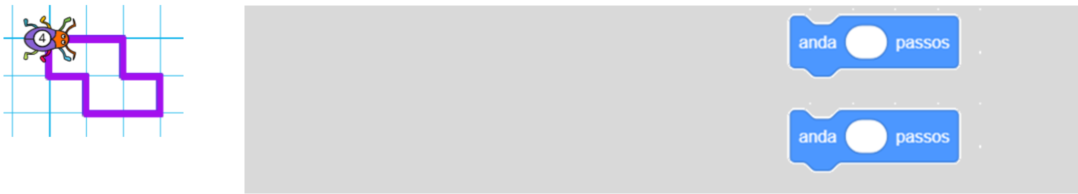
1. Em pares, usem os cartões com os comandos do Scratch para apresentar as instruções para a construção de cada um dos tetraminós. Ordenem corretamente os comandos para cada um dos cinco tetraminós, tendo em conta o seguinte início em cada um dos tetraminós:

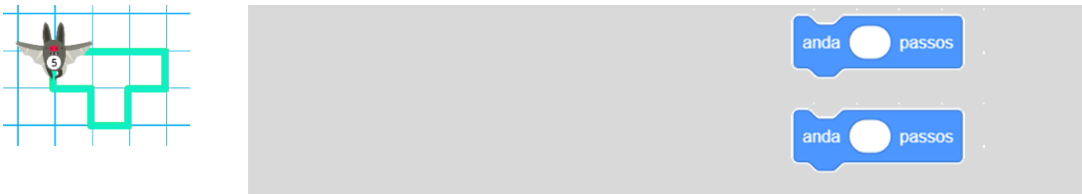


2. Vão construir um projeto no Scratch para desenhar os cinco tetraminós, tendo em atenção as indicações que se seguem, que devem ler antes de iniciarem o vosso trabalho no programa.
   - O projeto tem como ponto de partida um quadriculado como cenário e tem já cinco atores identificados com um número de 1 a 5.
   - Cada ator deve ter a programação correspondente ao tetraminó com o seu número. A programação do ator 1 (Gato) deve corresponder ao tetraminó 1, seguindo a numeração igual à das tarefas anteriores).
   - No quadriculado dado a medida do lado de cada quadricula corresponde a 30 passos dos atores. Registem os cálculos necessários para saber o número de passos que cada ator tem de dar para desenhar os diferentes lados de cada tetraminó.

Tetraminós	Cálculo do número de passos necessários para desenhar cada lado da tetraminó:	Introduzam o número de passos para desenhar os lados diferentes:
		
		







- Têm de introduzir sempre 90 (que corresponde a um quarto de volta) quando usam os comandos:

- Sempre que possível e de modo a reduzir o número de comandos necessários para desenhar um tetraminó, usem o comando que se segue indicando o número de repetições (pelo menos duas vezes) que querem que ocorra num conjunto de comandos:

Agora acedem ao projeto do Scratch e vão colocar os comandos em cada um dos atores correspondentes, para o ator desenhar o seu tetratminó quando se carrega nele.

Guião de exploração

Breve apresentação

Esta tarefa apresenta quatro partes. As diversas partes surgem de modo articulado e sequencial, contribuindo no seu todo para o trabalho dentro dos tópicos previstos que a seguir se indicam no âmbito das aprendizagens essenciais de matemática e das orientações curriculares para as TIC no 1.º ciclo do ensino básico.

Esta proposta envolve a utilização de diversos recursos. A Parte I e a Parte III possibilitam a utilização, tanto de material manipulável, como de ferramentas digitais. A Parte II envolve a utilização de um objeto robótico. Por sua vez, a Parte IV propõe a utilização de um ambiente de programação visual por blocos. Na Parte III são apresentadas duas versões da proposta de trabalho, uma com recursos manipuláveis e outra com recursos digitais. Assim, o professor, em função dos recursos de que dispõe ou de objetivos transversais que pretenda desenvolver, pode propor aos seus alunos o enunciado da Parte IIIA ou o enunciado da Parte IIIB.

As tarefas centram-se principalmente no tema matemático Geometria e Medida e visam a realização de pseudocódigo. A utilização de objetos tangíveis simples e de um ambiente de programação visual, como o Scratch, permite a concretização da programação com recurso à tecnologia. Esta tarefa pode ser proposta aos alunos a partir do 2.º ano, permitindo a conexão entre tópicos matemáticos de Geometria e Medida, nomeadamente de orientação espacial, de perímetro e de área, ou com Números no que respeita à multiplicação.

O tempo previsto para a realização pelos alunos e discussão coletiva que se segue para cada uma das partes desta tarefa é de: Parte I - 30 minutos; Parte II – 45 minutos; Parte III – 45 minutos; Parte IV – 60 minutos.

Enquadramento Curricular

Matemática

Capacidades matemáticas:

- Raciocínio (Classificar)
- Comunicação (Expressão e discussão de ideias)
- Representações matemáticas (Representações múltiplas)
- Conexões matemática (Conexões internas)
- Pensamento computacional (Abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração)

Tema matemático: Geometria e Medida e Números

Tópicos/subtópicos:

- Orientação espacial: Itinerários
- Comprimento: Perímetro
- Área: Significado; Medição e Unidades de medida (2.º ano); Figuras equivalentes (3.º ano)
- Relações numéricas: Factos básicos da multiplicação
- Multiplicação: Significado e usos da multiplicação

Objetivos de aprendizagem

- Criar, representar e comparar itinerários, usando os termos “quarto de volta”, “meia-volta”, “três quartos de volta” e “volta completa” para explicar as suas ideias
- Reconhecer o perímetro de uma figura plana
- Compreender o que é a área de uma figura plana
- Medir a área de figuras planas, usando unidades de medida não convencionais adequadas
- Reconhecer figuras equivalentes (3.º ano)
- Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação
- Interpretar e modelar situações com a multiplicação no sentido aditivo, e resolver problemas associados

Orientações curriculares TIC

- Desenvolver atividades de orientação, lateralidade e noções espaciais, através da movimentação de objetos virtuais ou tangíveis, em cenários e em interação com o seu contexto de forma criativa e inovadora
- Criar algoritmos e/ou programas que envolvam conceitos matemáticos relacionados a geometria
- Distinguir as características, funcionalidades e aplicabilidade de diferentes objetos tangíveis (robôs, *drones*, entre outros)
- Resolver desafios através da programação de objetos tangíveis

Recursos

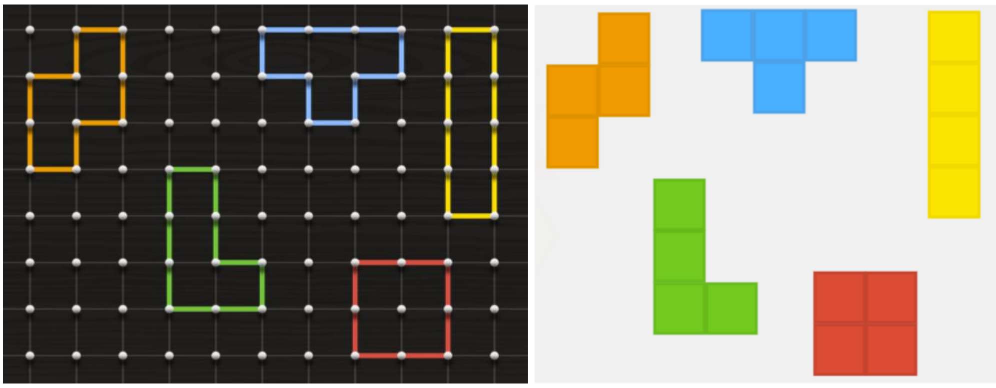
- Enunciados das tarefas
- Parte I: Papel quadriculado (Anexo 1) ou Computador/*Tablet*/*Smartphone* com a acesso a *Internet*
- Parte II: Objeto tangível simples - Robô DOC da Clementoni® ou outro equivalente, com passo igual a 15 cm; 20 Quadrados de papel branco ou colorido com 15 cm de lado (se for outro objeto com outro comprimento de passo é necessário adequar o tabuleiro e o comprimento do lado dos quadrados)
- Parte IIIA: Para cada par – Cartas com tetraminós (Anexo 2)
- Parte IIIB: Computador/*Tablet*/*Smartphone* com a acesso a *Internet*
- Parte IV: Comandos Scratch impressos (Anexo 3); Ficheiro Scratch com o cenário quadriculado já incluído ou aceder ao projeto inicial em https://scratch.mit.edu/projects/642759709
- Computador com Scratch (*Desktop* ou *online*)

Orientações para a exploração

Parte I

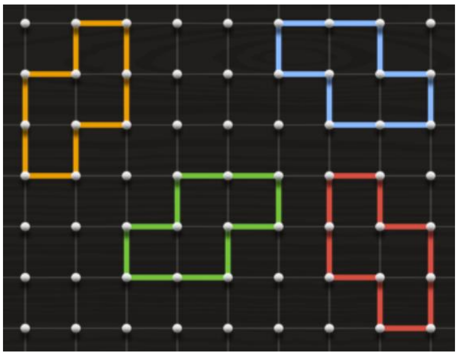
Abstração
Identificar as características das figuras a construir.

Os alunos devem construir todas as figuras poligonais que se obtêm com quatro quadrados iguais que se juntam pelos lados, designados tetraminós, e verificar que existem cinco figuras diferentes que se exemplificam a seguir. Os alunos devem fazer o registo no papel quadriculado (Anexo 1 desta tarefa) ou usar uma das aplicações digitais sugeridas, como mostram as duas figuras seguintes.

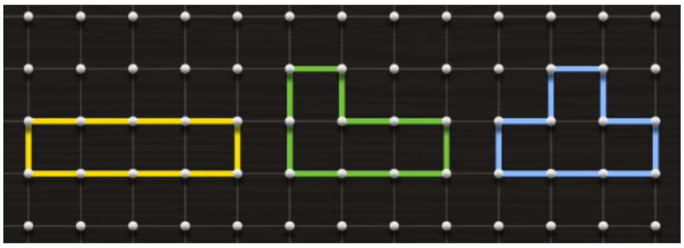


Depuração
Identificar figuras repetidas e procurar outras que ainda não estejam representadas.

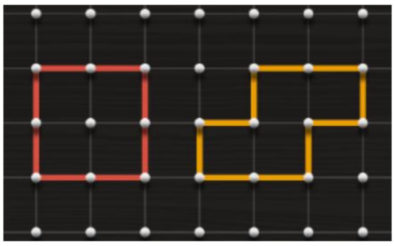
O professor deve, se necessário, apoiar os alunos na identificação de possíveis figuras que se obtêm por reflexão, rotação ou translação de outras já existentes para os ajudar a excluir as repetições que decorrem dessas transformações. A seguir, apresentam-se quatro figuras congruentes que correspondem apenas a um tetraminó por ser possível transformar umas nas noutras por reflexão, rotação ou translação (a cor do elástico é irrelevante). Face a estes exemplos, consideramos apenas uma das figuras.



É ainda importante que os alunos adotem estratégias que lhes permitam verificar se conseguiram obter todas as figuras possíveis, sem repetições. Estas estratégias são úteis em outras situações futuras, como por exemplo na representação de todos os pentaminós (polígonos formados por 5 quadrados congruentes), reforçando a sua capacidade de abstração e de reconhecimento de padrões. Uma das estratégias possíveis é começar por colocar os quatro quadrados em linha para obter um tetraminó. Essa é a única figura que se consegue desse modo, desprezando as situações de rotação. Para obter outras figuras podemos agora colocar três quadrados em linha e identificar posições possíveis para o quarto quadrado para formar polígonos diferentes, como se exemplifica a seguir:



O passo seguinte pode ser ter dois quadrados em cada linha horizontal, o que permite obter mais duas figuras diferentes:



Esgotam-se assim todas as cinco possibilidades, garantindo que não falta nenhuma e que não existem mais além dessas.

Os alunos devem ainda conseguir concluir que todos os tetraminós têm a mesma medida de área e que é igual a quatro unidades de área, considerando como unidade de medida de área o quadrado unitário.

Reconhecimento de padrões
Reconhecer ou identificar padrões no processo de construção e verificação de todas as possibilidades de tetraminós, podendo este ser aplicado na descoberta de outros conjuntos de figuras, como os pentaminós.

Parte II

Na aula podem construir os diversos tetraminós sobre um quadriculado com medida de comprimento do lado adequado para um objeto tangível simples, como um robô. O professor deve preparar os tabuleiros quadriculados e o robô para os alunos utilizarem.

Utilizando um objeto tangível simples, como o Robô DOC da Clementoni®, podem concretizar os movimentos necessários para o objeto tangível percorrer a linha de fronteira de tetraminós construídos com quadrados de papel com o comprimento do lado igual ao comprimento de um movimento em frente do robô, como se exemplifica a seguir:

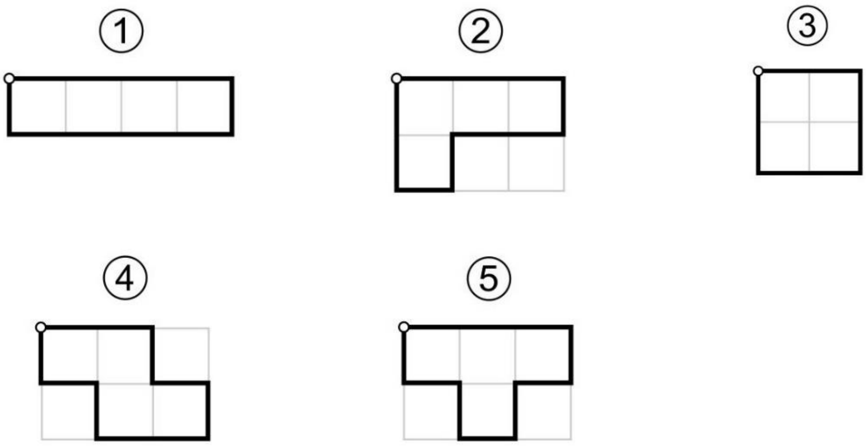
Abstração
Centrar a análise da figura na linha de fronteira dos tetraminós.

Programar o objeto robótico para passar sobre a linha de fronteira de cada tetraminó, permite destacar características do polígono, bem como o uso de pseudocódigo. Se os alunos não se apropriaram ainda do funcionamento do objeto robótico podem introduzir comandos para realizar parte do percurso, mas gradualmente devem procurar introduzir todos os comandos necessários para o objeto robótico completar todo o percurso da fronteira do tetraminó de uma única vez. Esta situação permite identificar erros.

Abstração
Identificar os movimentos necessários e suficientes para o percurso do robô.

Decomposição
Programar o robô para fazer uma parte da linha de fronteira e depois concluir o percurso, podendo ser identificadas regularidades associadas à decomposição.

Os tetraminós podem ser numerados de 1 a 5 de modo a facilitar o registo pelos alunos do seu perímetro, relacionando-o com a contagem dos passos introduzidos no objeto robótico para que este percorra toda a linha de fronteira.



Os alunos podem apresentar diferentes registos para o cálculo do perímetro que podem ser discutidas e relacionadas.

Nesse momento podem ainda ser discutidas ideias relativas às propriedades de cada um dos tetraminós:

- Mais uma vez, pode evidenciar-se que em todas as figuras são usados quatro quadrados congruentes, o que faz com que todas ocupem igual superfície, tendo, por isso, todas igual medida de área;

- Os alunos podem indicar que os tetraminós 1 e 3 são quadriláteros, o primeiro um retângulo não quadrado e o tetraminó 3 um quadrado;
- Os alunos podem evidenciar elementos das figuras, tais como lados, vértices e ângulos, a partir da sequência de instruções a dar ao robô, dando sentido à ordem dos comandos;
- A identificação da linha de fronteira é essencial para saberem por onde se vai deslocar o robô, não considerando assim outras linhas que estejam no interior da figura;
- Com esse trabalho torna-se pertinente falar do perímetro da figura e de como pode ser determinado com uma unidade de medida não convencional, ou seja, definindo como unidade de medida de comprimento o lado do quadrado dado, o que se associa ao número de passos que o robô vai dar em frente.

Depuração
Identificar e corrigir erros, refazendo a linha de programação para um correto percurso.

Nas instruções a dar ao robô para percorrer a linha de fronteira de cada um dos tetraminós podem-se evidenciar aspetos relativos à orientação espacial e a utilização de indicações específicas - virar um quarto de volta à direita ou virar um quarto de volta à esquerda - e ver o robô tornar tangíveis essas indicações.

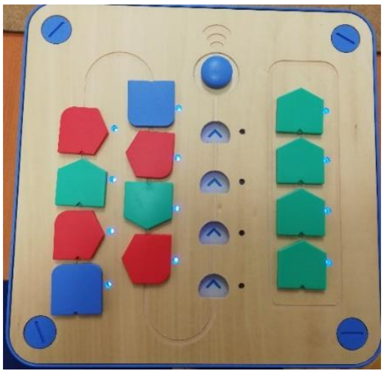
Sugestões de extensão

Além do que é proposto na tarefa, é possível utilizar outros robôs que visam ainda outro tipo de trabalho e de estabelecimento de relações. Cada situação deve visar a exploração de ideias matemáticas significativas, que se tornem evidentes para os alunos, fomentando a sua reflexão em torno dessas aprendizagens.

Há objetos robóticos que permitem criar ciclos de repetição, potenciando o reconhecimento de padrões. Por exemplo, o Blue Bot® permite que se repita o último conjunto de instruções, podendo-se por isso programar apenas parte do percurso e repetir esse percurso.

Reconhecimento de padrões
Reconhecer padrões na sequência de instruções definida para a representação de cada figura e aplicá-los na resolução de problemas semelhantes.

Outro robô que também se pode utilizar com uma funcionalidade de repetição é o Cubeto®, cujo conjunto de instruções a repetir pode surgir em diferentes momentos. Contudo, essa repetição está limitada a quatro indicações. Além disso, o número de peças é limitado, podendo condicionar a estratégia. A seguir exemplifica-se a programação a realizar no Cubeto® para o retângulo (tetraminó 1).



Parte IIIA e Parte IIIB

Os alunos, organizados em pares, realizam o jogo em que um elemento (aluno A) tem a figura (tetraminó) e dá indicações ao colega (aluno B) para que este a desenhe no quadriculado dado, onde é assinalado o ponto de partida (Anexo 2 da tarefa). Ambos devem ter em conta o ponto de partida previamente assinalado, para que ambas as representações fiquem iguais.

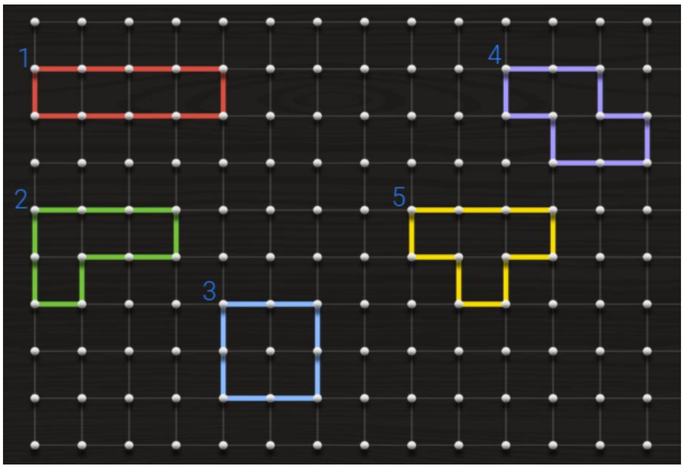
Abstração
Focar nas características dos tetraminós que permitem a resolução do problema.

No caso de serem usadas as cartas com os tetraminós representados no quadriculado e o quadriculado vazio (Parte IIIA), esse material permite que os dois alunos não conheçam o que o outro tem ou está a fazer, apoiando a dinâmica de jogo.

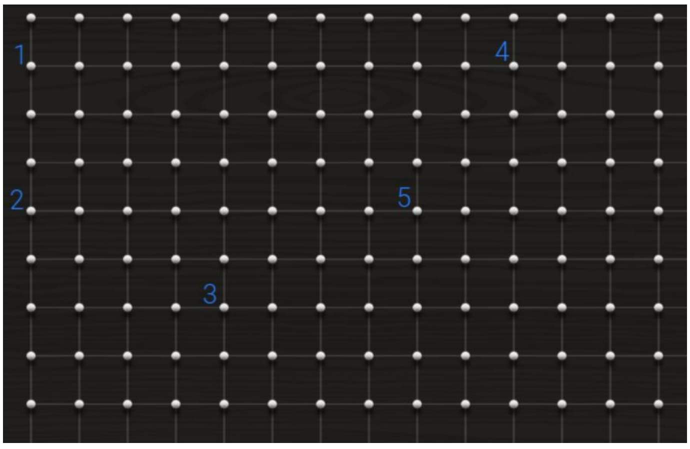
Também a proposta digital (Parte IIIB) fomenta a dinâmica de jogo. Cada aluno tem a sua chave, que dá acesso ao geoplano respetivo: um com os tetraminós já representados e outro com os pontos de partida assinalados, como se apresenta de seguida.

Depuração
Identificar e corrigir erros, refazendo as indicações ou o desenho dos tetraminós.

Geoplano com os tetraminós representdos para o aluno A:



Geoplano com pontos de partida para a representação dos tetraminós para o aluno B:

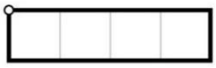


Além disso, no caso das cartas (Parte IIIA), o facto de poderem manuseá-las pode facilitar a compreensão das instruções a dar e a cumprir, por exemplo, rodando a carta um quarto de volta à direita ou um quarto de volta à esquerda. Contudo, caso esta metodologia não seja adequada à turma, a dinâmica pode ser diferente, colaborando ambos para a construção das indicações, por exemplo.

Os alunos devem comparar as figuras de modo a verificar se as indicações dadas foram corretas ou se foram corretamente interpretadas. Abaixo é indicada a solução para cada tetraminó:

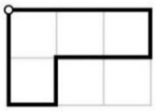
Abstração
Focar nas características dos tetraminós que permitem a resolução do problema.

1



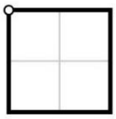
Indicações:
4↑ 1↱ 1↑ 1↱ 4↑ 1↱ 1↑ 1↱ (*)

2



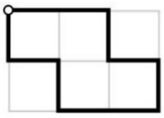
Indicações:
3↑ 1↱ 1↑ 1↱ 2↑ 1↰ 1↑ 1↱ 1↑ 1↱ 2↑ 1↱ (*)

3



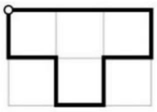
Indicações:
2↑ 1↱ 2↑ 1↱2↑ 1↱ 2↑ 1↱ (*)

4



Indicações:
2↑ 1↱ 1↑ 1↰ 1↑ 1↱ 1↑ 1↱ 2↑ 1↱ 1↑ 1↰ 1↑ 1↱ 1↑ 1↱ (*)

5



Indicações:
3↑ 1↱ 1↑ 1↱ 1↑ 1↰ 1↑ 1↱ 1↑ 1↱ 1↑ 1↰ 1↑ 1↱ 1↑ 1↱ (*)

Parte IV- Projeto no Scratch

Esta tarefa promove a utilização de um ambiente de programação visual por blocos, propondo que os alunos criem uma linha de programação que permita desenhar cada um dos tetraminós. Este trabalho desenvolve-se em dois momentos.

Num primeiro momento são disponibilizados blocos como os do software, mas em material manipuláveis (Anexo 3 da tarefa) para que selecionem e ordenem os comandos necessários para a construção do tetraminó, tendo em conta as indicações registadas na tarefa.

O segundo momento envolve a utilização do computador e a introdução da programação no Scratch, para que a possam testar e identificar e corrigir erros, caso existam. Previamente os alunos devem analisar na tarefa algumas indicações.

Iniciam a construção do tetraminó com o comando de evento “quando alguém clica em ti”. Ao programar no Scratch este comando permite que cada ator construa um tetraminó.

É necessário programar cinco atores diferentes, um para cada tetraminó. É também essencial usar o comando “baixa a tua caneta” para que a deslocação do ator fique registada no palco.

Deve ter-se ainda em consideração o seguinte:

- É necessário ter em atenção o quadriculado que serve de cenário. Neste caso o comprimento do lado do quadrado unitário (quadrícula) corresponde a 30 passos. Este aspeto é importante para a definição do número de passos que o ator deve dar para desenhar cada um dos lados da figura. Surgem aqui ideias matemáticas importantes relacionadas com os múltiplos do número, relacionando o número de lados das quadrículas para construir os diversos lados de uma figura com o número de passos. Podem organizar os valores numa tabela, como se exemplifica a seguir, e estabelecer relações multiplicativas.

Algoritmia
Desenvolver o procedimento passo a passo de construção de cada um dos tetraminós.

Número de quadrículas a percorrer no lado da figura	Número de passos
1	30
2	60
3	90
4	120

x 30

- O quarto de volta tem de ser indicado com a explicitação da medida da amplitude do ângulo reto, ou seja, 90 graus.

- A utilização do Scratch introduz um novo desafio relacionado com o comando “Repete”. Esse comando permite identificar regularidades nas figuras e nas indicações dadas. Pode, por isso, iniciar-se a programação com todos os passos iniciais e em seguida substituir o(s) conjunto(s) que se repete(m). Nas figuras 1 e 3 deve ser facilmente identificada a repetição por parte dos alunos. Podem começar por reconhecer a regularidade nestas figuras e em seguida procurar regularidades nas restantes figuras que permitam o uso do comando “Repete”. Contudo, existem outras em que se pode usar esse comando, como sendo nas figuras 4 e 5, sendo que na 5 o reconhecimento do que se repete possa ser mais complexo. O professor deve fomentar a discussão e o reconhecimento das regularidades para potenciar o recurso ao comando repete para assim reduzir o número de comandos.

Reconhecimento de padrões
Reconhecer ou identificar padrões no processo de procurar repetição de blocos e aplicar os que se revelam eficazes na procura de repetições noutros tetraminós.

- Pode, ainda que sem profundidade, emergir a exploração de coordenadas já que vai ser necessário situar cada ator num ponto diferente do plano para o desenho das figuras não se sobrepor. Assim, para se situar num ponto de interseção das linhas horizontais e verticais, tanto a abcissa como a ordenada têm de ser números múltiplos de 30.

O projeto pode ser facultado aos alunos com os aspetos iniciais introduzidos, como sendo o cenário, os atores e o início da programação de desenho a fim de centrar a atenção dos alunos na representação dos tetraminós. Um exemplo de projeto com os elementos iniciais está disponível em:

Depuração
Procurar e corrigir erros a partir da testagem do programa criado, verificando a ordem dos comandos para uma correta representação dos tetraminós.

https://scratch.mit.edu/projects/642759709

A utilização do Scratch permite a testagem da linha de programação e a correção de eventuais erros introduzidos, focando o aluno nas características da figura e no que é necessário fazer para a desenhar.

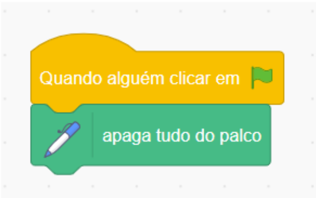
Segue-se, para cada figura um exemplo de programação que se pode usar.

Projeto no Scratch

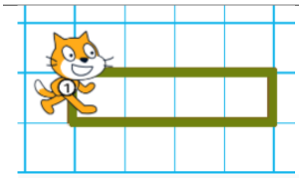
Um exemplo do projeto completo pode ser consultado em:

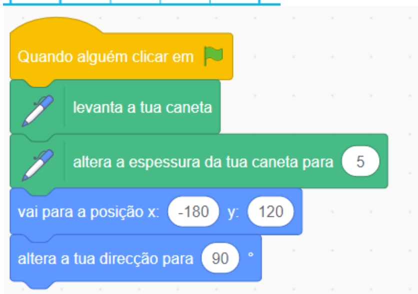
https://scratch.mit.edu/projects/729597555

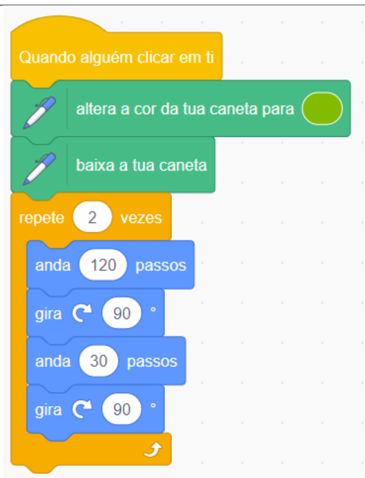
O cenário tem na sua linha de código o seguinte:

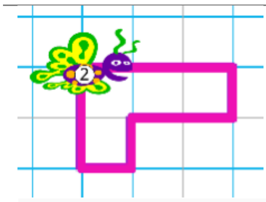


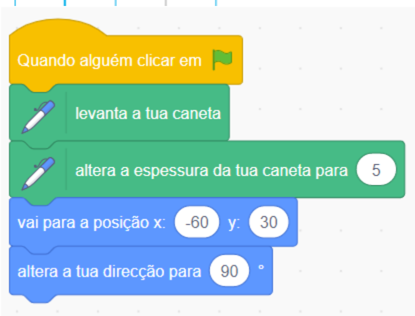
Cada um dos atores pode ter a programação seguinte:

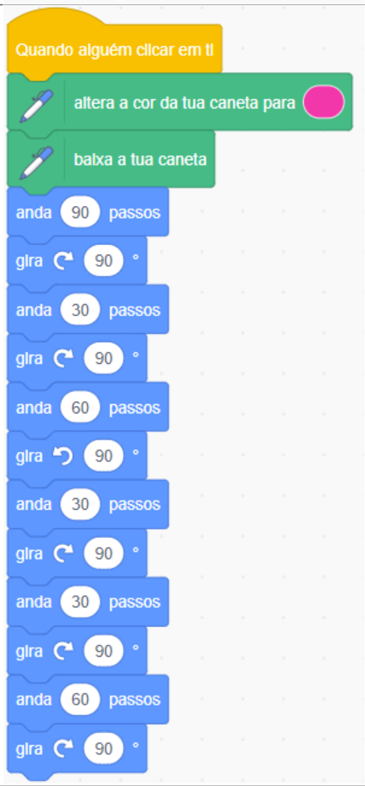


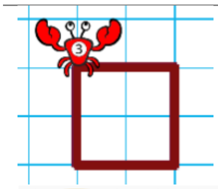




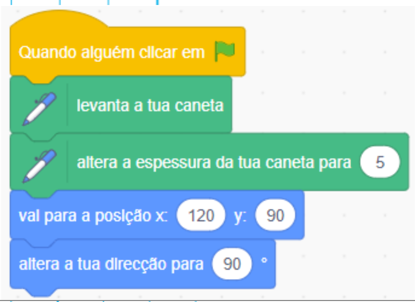




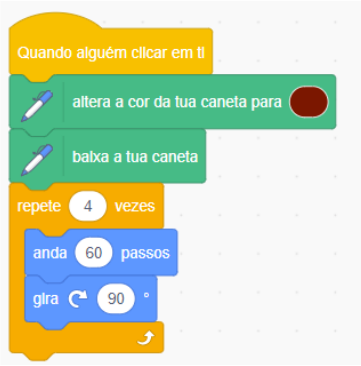




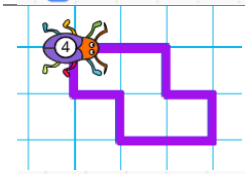
3



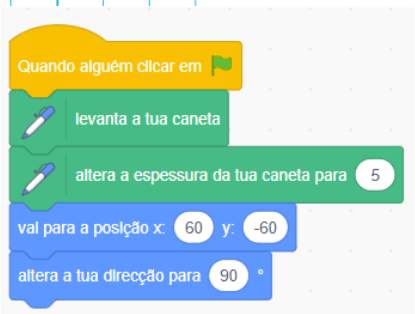
Quando alguém clicar em
levanta a tua caneta
altera a espessura da tua caneta para 5
vai para a posição x: 120 y: 90
altera a tua direcção para 90 °



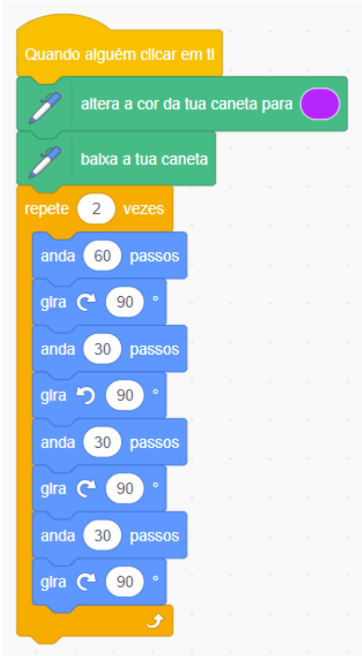
Quando alguém clicar em ti
altera a cor da tua caneta para
baixa a tua caneta
repete 4 vezes
anda 60 passos
gira 90 °



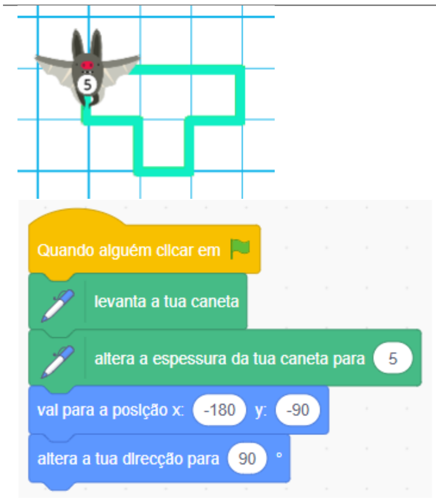
4

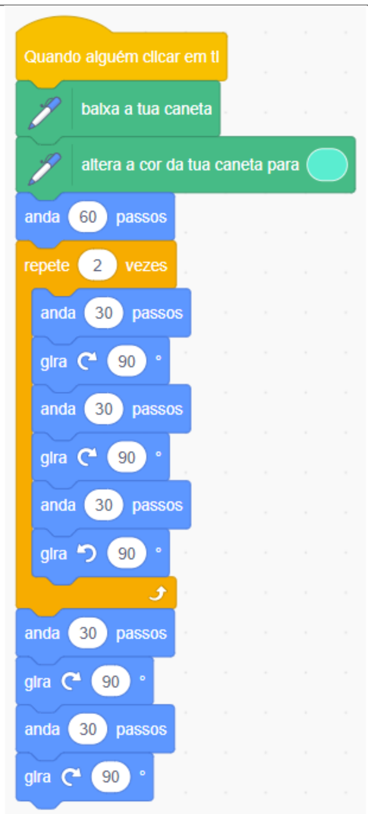


Quando alguém clicar em
levanta a tua caneta
altera a espessura da tua caneta para 5
vai para a posição x: 60 y: -60
altera a tua direcção para 90 °

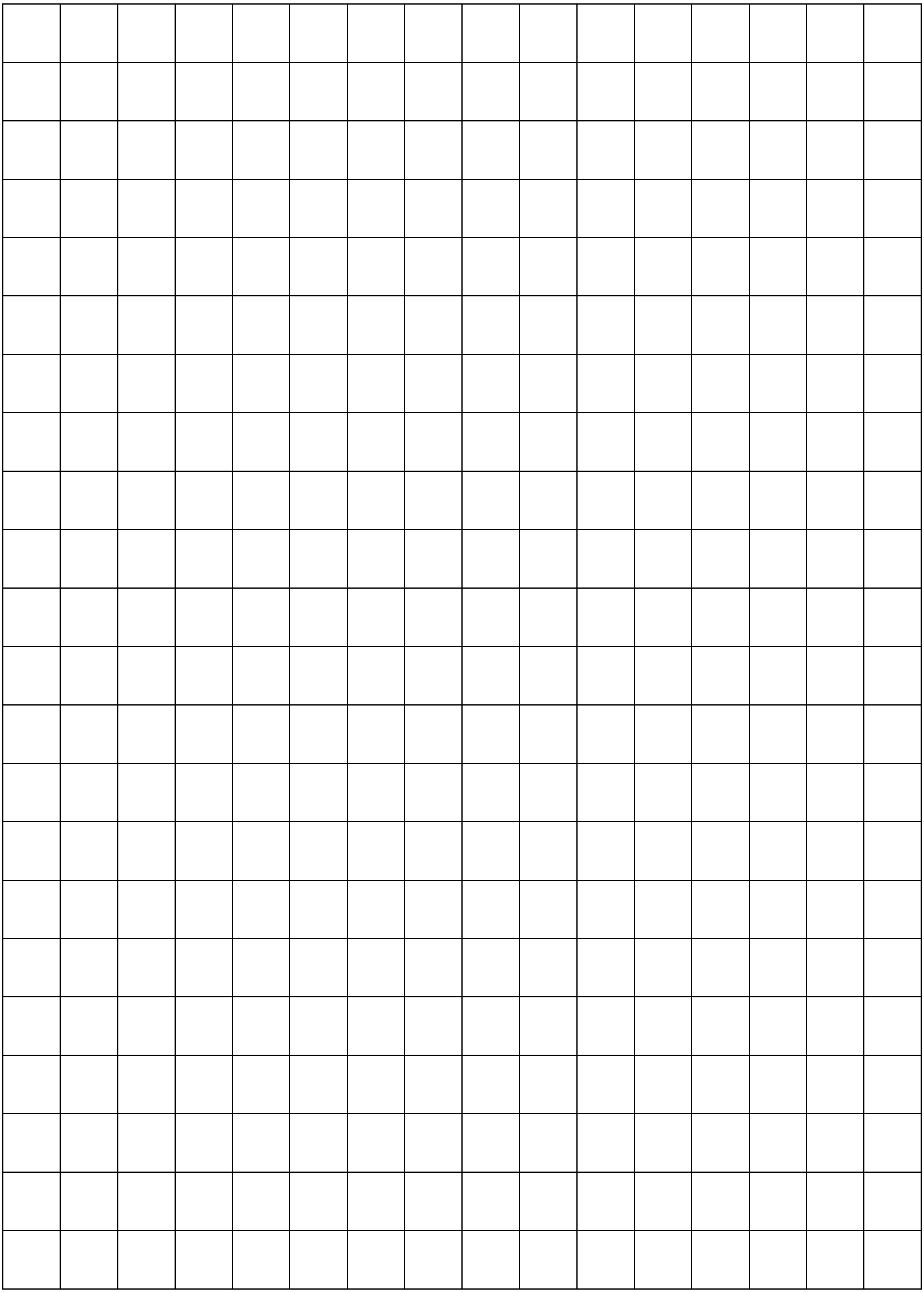


Quando alguém clicar em ti
altera a cor da tua caneta para
baixa a tua caneta
repete 2 vezes
anda 60 passos
gira 90 °
anda 30 passos
gira 90 °
anda 30 passos
gira 90 °
anda 30 passos
gira 90 °


5
Quando alguém clicar em
levanta a tua caneta
altera a espessura da tua caneta para 5
vai para a posição x: -180 y: -90
altera a tua direcção para 90 °


Quando alguém clicar em ti
baixa a tua caneta
altera a cor da tua caneta para
anda 60 passos
repete 2 vezes
anda 30 passos
gira 90 °
anda 30 passos
gira 90 °
anda 30 passos
gira 90 °
anda 30 passos
gira 90 °
anda 30 passos
gira 90 °

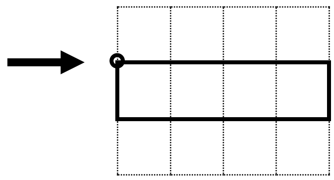
Tetraminós Anexo 1 – Quadriculado



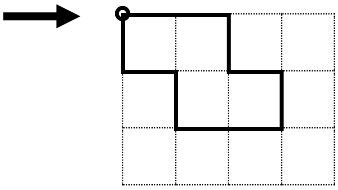
Tetraminós Anexo 2 – Cartas Parte IIIA

Cartas para o aluno A

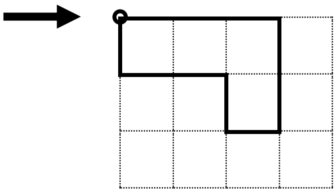
①



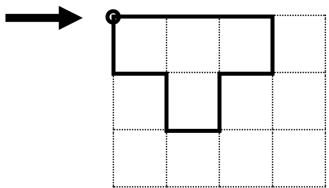
②



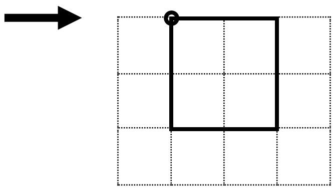
③



④

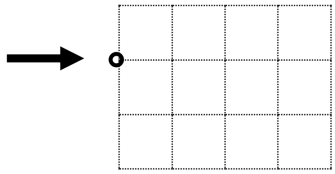


⑤

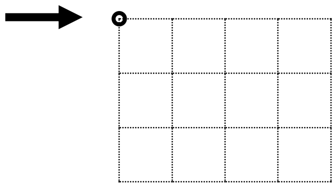


Cartas para o aluno B

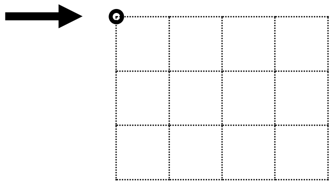
①



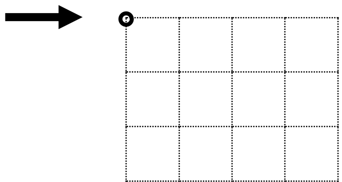
②



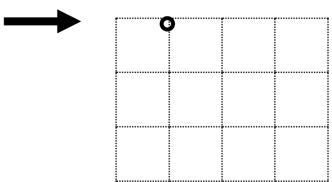
③



④



⑤



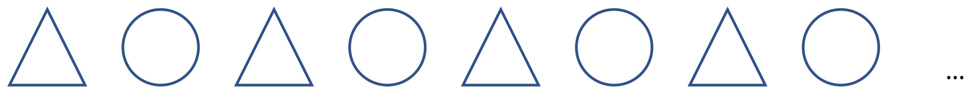
Tetraminós Anexo 3 – Comandos Scratch

Quando alguém clicar em ti	baixa a tua caneta	gira ↻ °
Quando alguém clicar em ti	baixa a tua caneta	gira ↻ °
repete vezes	anda passos	gira ↻ °
↺	anda passos	gira ↻ °
repete vezes	anda passos	gira ↻ °
↺	anda passos	gira ↻ °
anda passos	anda passos	gira ↻ °
anda passos	gira ↺ °	gira ↺ °
gira ↺ °	gira ↺ °	gira ↺ °
gira ↺ °	gira ↺ °	gira ↺ °

SEQUÊNCIAS DE REPETIÇÃO (2)

Tarefa

Considera a seguinte sequência que repete um conjunto de objetos:



1 2 3 4 5 6 7 8

1. Resolve as seguintes questões a pares.

   a) Pede ao teu colega que diga um número entre 20 e 40. Diz, se nessa posição desta sequência está um círculo ou um triângulo. Explica como chegaste à tua resposta.

   b) Se a posição na sequência, for a número 55, que figura irás encontrar? Justifica a tua resposta.

2. Cria um jogo no Scratch de pergunta e resposta em que o ator te pede que indiques um número e que, após a tua resposta, o jogo indique a figura que está nessa posição.

Guião de exploração

Breve apresentação

Esta tarefa envolve o trabalho com uma sequência de repetição e procura levar os alunos à generalização de regularidades, necessária para a elaboração de um jogo numa linguagem de programação visual por blocos, como o Scratch, que devolve a figura que se encontra em qualquer posição da sequência pedida. Esta tarefa pode ser proposta a alunos a partir do 2.º ano, permitindo a conexão entre os temas matemáticos de Álgebra e Números, nomeadamente pelo estabelecimento de relações numéricas no que respeita à tabuada do 2 e da relação da multiplicação com a divisão. A proposta da criação do jogo, na questão 2, e a dinâmica desse momento da aula dependem do conhecimento que os alunos têm do Scratch e da autonomia na sua utilização.

A tarefa tem um tempo previsto de 90 minutos para a sua realização e discussão, podendo variar em função da experiência dos alunos na utilização do Scratch.

Enquadramento Curricular

Matemática

Capacidades matemáticas:

- Raciocínio (Conjeturar e generalizar, justificar)
- Comunicação (Expressão e discussão de ideias)
- Representações matemáticas (Conexões entre representações, linguagem simbólica matemática)
- Conexões matemática (conexões internas)
- Pensamento computacional (Abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração)

Tema matemático: Álgebra e Números

Tópicos/subtópicos:

- Regularidades em sequências: Sequências de repetição
- Factos básicos da multiplicação e sua relação com a divisão
- Relação entre a multiplicação e a divisão

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e descrever regularidades em sequências de repetição
- Identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência
- Prever um termo não visível de uma sequência de repetição e justificar a previsão

- Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuadas do 2) e sua relação com a divisão
- Relacionar a multiplicação e a divisão, em situações de cálculo e na interpretação e resolução de problemas

Orientações curriculares TIC

- Criar algoritmos de complexidade baixa para a resolução de desafios e problemas específicos
- Identificar e resolver problemas matemáticos simples, com apoio em ferramentas digitais

Recursos

- Enunciado da tarefa
- Computador para cada par de alunos com o Scratch instalado ou acessível *online* em https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted
- Ficheiro do Scratch com cenário e atores já introduzidos ou utilização online do projeto iniciado disponível no link https://scratch.mit.edu/projects/621945627

Orientações para a exploração

Os alunos devem conseguir identificar que existem regularidades na sequência. Alguns alunos podem continuar a desenhar os termos da sequência até à ordem pretendida e identificar a figura, respeitando a ordem pela qual as figuras surgem na sequência e identificando que, neste caso, as figuras que estão imediatamente antes e depois de qualquer figura são iguais e que a seguir a um triângulo há um círculo e que a seguir a um círculo há um triângulo.

Reconhecimento de padrões
Reconhecer e identificar padrões nesta sequência de repetição comuns a outras já estudadas.

Contudo, pretende-se que aprofundem a análise da sequência. Devem identificar que existe um conjunto de objetos (grupo de repetição) que se repete ciclicamente. Neste caso, esse conjunto é constituído por dois elementos, um triângulo e um círculo:

Abstração
Reconhecer que há duas figuras que se repetem alternadamente.

Os alunos devem ser capazes de associar cada figura à sua posição na sequência para também aí encontrarem regularidades. A escolha de um número entre 20 e 40 é meramente indicativa, de modo que não seja um valor nem demasiado próximo, nem demasiado distante. Os alunos podem usar o seu conhecimento sobre factos numéricos e relações numéricas. Para saber a figura que se encontra nessa posição, têm de verificar que as posições pares são ocupadas por círculos e as posições ímpares por triângulos. Perante o número indicado, têm de verificar se se trata de um número par ou de um número ímpar, reconhecendo, por exemplo, a regularidade no algarismo das unidades, 0, 2, 4, 6 ou 8 para os números pares e 1, 3, 5, 7 ou 9 para os números ímpares.

Abstração
Centrar a análise na posição ocupada pelos triângulos e na posição ocupada pelos círculos.

Na alínea b) é indicada uma posição de número ímpar, pelo que os alunos devem dizer que nessa posição está um triângulo. Podem, além da estratégia referida anteriormente de análise do algarismo das unidades, fazer a divisão do número por 2.

Reconhecimento de padrões
Identificar padrões e realizar previsões com base nesses padrões.

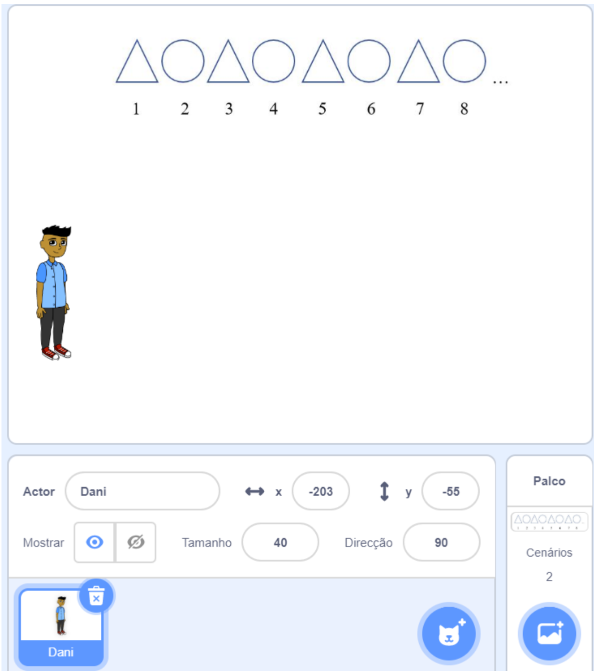
Dividendo
55 | 2 ← Divisor
15   27 ← Quociente
1
Resto

- Se o resto da divisão do número por 2 der 0, então o número é par e temos um círculo.
- Se o resto da divisão do número por 2 der 1, então o número é ímpar e temos um triângulo.

Exemplos de projeto no Scratch

São de seguida apresentados exemplos de projetos no Scratch que respondem ao solicitado na questão 2 da tarefa. O professor deve dar acesso ao início do projeto que tem já disponível o cenário com a imagem dos primeiros termos da sequência representados e os atores necessários, como se mostra a seguir:

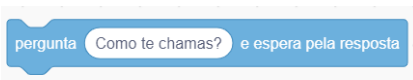
https://scratch.mit.edu/projects/621945627



Os alunos devem criar um projeto que permita que qualquer número natural seja introduzido, que corresponde à ordem do termo pretendido, e que o ator devolva como resposta a essa ordem o termo correspondente.

Decomposição
Estruturar a resolução do problema por etapas de menor complexidade:
- posições que são divisíveis por 2;
- posições que não são divisíveis por 2.

A análise e a discussão dos projetos dos alunos são muito relevantes na aula, permitindo evidenciar:

- a interação com o utilizador usando o comando de pergunta e aguardar resposta: 

;

- o papel do resto da divisão por 2 do número indicado pelo jogador, usando o comando disponível no conjunto dos operadores: 

;
- a relação de igualdade em que se expressa que o programa deve analisar se o resto da divisão do número indicado (a resposta) é igual a 0. Se a igualdade for uma proposição verdadeira, então foi indicado um número par e o elemento que está nessa posição da sequência é um círculo. Se a igualdade for uma proposição falsa então foi indicado um número ímpar e o elemento que está nessa posição da sequência é um triângulo;
- o uso de condições: i) usar a condição *Se… então…* duas vezes; ii) usar a condição *Se… então… senão…*, uma vez que se analisam apenas duas situações – a proposição antecedente é verdadeira e o jogo retorna a resposta que se segue à expressão *então* ou a proposição antecedente é falsa e o jogo retorna a resposta que se segue à expressão *senão*:


;
- a importância da definição de um algoritmo que devolve a resposta correta, qualquer que seja o número indicado;
- a importância de testar o programa utilizando diversos números, pares e ímpares, e verificar a adequação da resposta devolvida pelo jogo.

Algoritmia
Desenvolver o procedimento passo a passo, de acordo com as etapas estabelecidas, para solucionar o problema.

Depuração
Refinar e otimizar o processo criado, reduzindo o número de comandos a usar.

Depuração
Procurar e corrigir erros a partir da testagem do programa criado, verificando a ordem dos comandos e o cumprir do objetivo do jogo.

Exemplo de projeto elementar de resposta direta

Neste projeto há apenas um ator que coloca a pergunta para ser indicado um número natural e devolve a resposta se é um círculo ou um triângulo o elemento que está nessa posição na sequência. Este projeto pode ser consultado em:

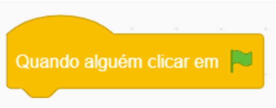
https://scratch.mit.edu/projects/612481601

Algoritmia
Desenvolver o algoritmo para solucionar o problema e implementá-lo num recurso tecnológico.

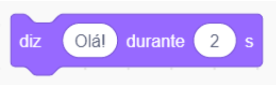
Programação para o ator que questiona

Comando utilizados	Programação

Evento

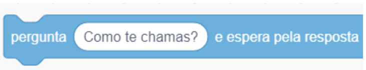


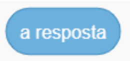
Aparência



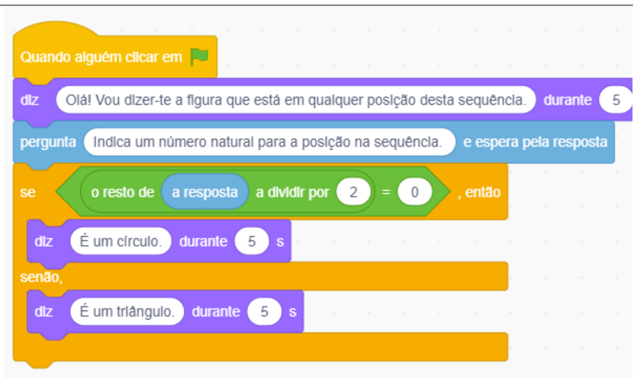
Controlo

Sensores





Operadores

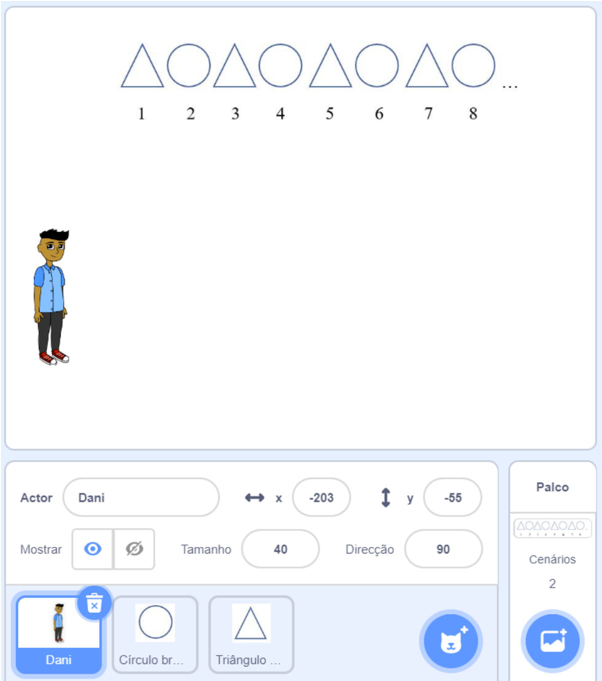


Exemplo de projeto em que os elementos da sequência também são atores

Neste projeto existem vários atores: o ator que questiona, um triângulo e um círculo. Este projeto pode ser consultado em:

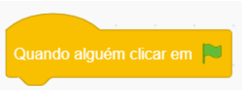
https://scratch.mit.edu/projects/455814334

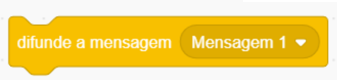
Algoritmia
Desenvolver o algoritmo para solucionar o problema e implementá-lo num recurso tecnológico.

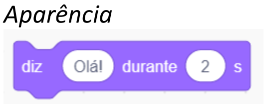


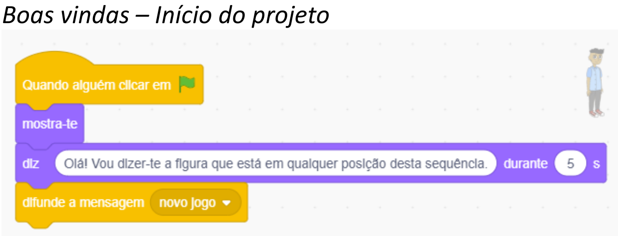
O triângulo e o círculo são também atores para cada um deles ser programado de modo a surgirem na tela quando o valor indicado corresponder a uma ordem em que esse elemento está.

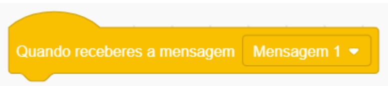
Programação para o ator que questiona

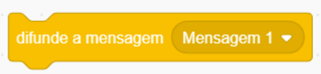
<table>
<tr><th>Comando utilizados</th><th>Programação</th></tr>
<tr><td>Evento




Aparência


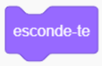

</td><td>Boas vindas – Início do projeto

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Comando utilizados</th><th>Programação</th></tr>
<tr><td>Evento


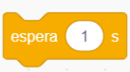


Aparência

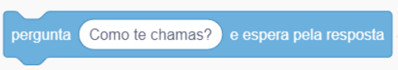
</td><td>Ações do ator para iniciar o jogo e identificar o termo na sequência</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>


Controlo



Sensores



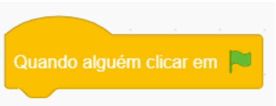
Operadores

</td><td>

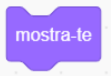

</td></tr>
</table>

Programação para o ator que representa o círculo branco

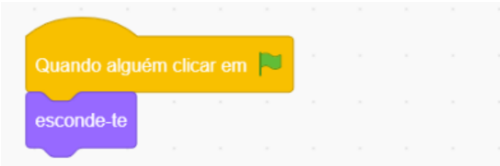
<table>
<tr><th>Comando utilizados</th><th>Programação</th></tr>
<tr><td>
Evento



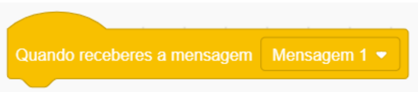
Aparência

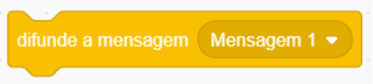


</td><td>
Boas vindas – Início do projeto

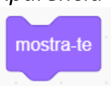


</td></tr>
<tr><td>
Evento

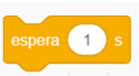




Aparência



Controlo



</td><td>
Ações do ator para aparecer quando é o termo da sequência ordem que é indicada

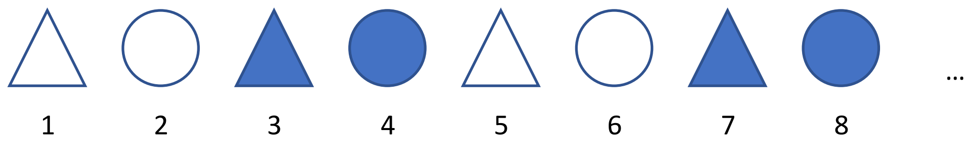
</td></tr>
</table>

De modo análogo, com as devidas adaptações, deve ser feita a programação para o ator que representa o triângulo branco da sequência.

SEQUÊNCIAS DE REPETIÇÃO (4)

Tarefa

Considera a seguinte sequência que repete um conjunto de objetos:



1. Resolve as seguintes questões a pares.

Pede ao teu colega que diga um número entre 20 e 40.

a) Diz se nessa posição desta sequência está um círculo ou um triângulo. Explica como chegaste à tua resposta.

b) Indica se a figura nessa posição é sombreada ou não. Explica como chegaste à tua resposta.

2. Cria um jogo no Scratch de pergunta e resposta em que o ator te pede que indiques um número para a posição na sequência e que, após a tua resposta, o jogo indique a figura que está nessa posição.

Guião de exploração

Breve apresentação

Esta tarefa envolve o trabalho com uma sequência de repetição e procura levar os alunos à generalização de regularidades, necessária para a elaboração de um jogo numa linguagem de programação visual por blocos, como o Scratch, que devolve a figura que se encontra em qualquer posição da sequência pedida. A tarefa pode ser proposta a alunos a partir do 3.º ano, permitindo a conexão entre os temas matemáticos de Álgebra e Números, nomeadamente pelo estabelecimento de relações numéricas no que respeita à tabuada do 4 e da relação da multiplicação com a divisão. A proposta da criação do jogo, na questão 2, e a dinâmica desse momento da aula dependem do conhecimento que os alunos têm do Scratch e da autonomia na sua utilização.

A tarefa tem um tempo previsto de 90 minutos para a sua realização e discussão, podendo variar em função da experiência dos alunos na utilização do Scratch.

Enquadramento Curricular

Matemática

Capacidades matemáticas:

- Raciocínio (Conjeturar e generalizar, justificar)
- Comunicação (Expressão e discussão de ideias)
- Representações matemáticas (Conexões entre representações, linguagem simbólica matemática)
- Conexões matemática (conexões internas)
- Pensamento computacional (Abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração)

Tema matemático: Álgebra e Números

Tópicos/subtópicos:

- Regularidades em sequências: Sequências de repetição
- Factos básicos da multiplicação e sua relação com a divisão
- Significado e usos das operações
- Algoritmo da divisão com números naturais

Objetivos de aprendizagem

- Identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência
- Descrever, em linguagem natural, a regra de formação de uma sequência de repetição, explicando as suas ideias
- Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuadas do 4) e sua relação com a divisão (2.º ano)

- Interpretar e modelar situações com a adição/subtração e multiplicação/divisão e resolver problemas associados (3.º ano)
- Interpretar o resto da divisão obtida no algoritmo da divisão, nomeadamente no contexto da resolução de problemas (4.º ano)

Orientações curriculares TIC

- Criar algoritmos de complexidade baixa para a resolução de desafios e problemas específicos
- Identificar e resolver problemas matemáticos simples, com apoio em ferramentas digitais

Recursos

- Enunciado da tarefa
- Computador para cada par de alunos com o Scratch instalado ou acessível online em https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tutorial=getStarted
- Ficheiro do Scratch com cenário e atores já introduzidos ou utilização online do projeto iniciado em https://scratch.mit.edu/projects/621956837.

Orientações para a exploração

Os alunos devem conseguir identificar o conjunto de objetos que se repete (grupo de repetição). Neste caso esse conjunto é constituído por quatro elementos, uma vez que existem dois objetos brancos e dois objetos sombreados, ainda que a sua forma seja igual:

Reconhecimento de padrões
Reconhecer e identificar padrões nesta sequência de repetição comuns a outras já estudadas.

A escolha de um número entre 20 e 40 é meramente indicativa para que não seja um valor demasiado próximo, nem demasiado distante, para que os alunos possam usar o seu conhecimento sobre factos numéricos e relações numéricas. Contudo, alguns alunos podem continuar a desenhar os termos da sequência até à ordem pretendida e identificar a figura, respeitando a ordem pela qual as figuras surgem na sequência. Na primeira questão, podem verificar que as posições pares são ocupadas por círculos e as posições ímpares por triângulos, podendo apresentar essa generalização em linguagem natural. Assim, face ao número indicado, têm apenas de verificar se se trata de um número par ou de um número ímpar para associar a uma forma ou a outra.

Abstração
Reconhecer que há quatro figuras que se repetem pela mesma ordem.

Abstração
Centrar a análise nas figuras que ocupam as posições pares e as posições ímpares.

Para a segunda questão, o critério tem de ser mais elaborado. Na determinação de termos relativos a ordens distantes os alunos podem usar a relação direta entre o resto da divisão por 4 e as quatro primeiras figuras da sequência, que se irão repetir ciclicamente, e relações com outros múltiplos de que damos alguns exemplos:

Abstração
Centrar a análise nos critérios que permitem saber se a figura é ou não sombreada.

- Se o número for par, para decidir se é sombreado ou não, é necessário verificar se o número é ou não múltiplo de 4. Se for par e múltiplo de 4 (o resto da divisão por 4 é 0) é um círculo sombreado (o elemento que, no primeiro conjunto que se repete ciclicamente, está na quarta posição). Se for par, mas não múltiplo de 4 (o resto da divisão por 4 é 2), então nessa posição está um círculo branco (o elemento que, no primeiro conjunto que se repete ciclicamente, está na segunda posição).

- Se o número é ímpar, é preciso verificar se sucede ou antecede a um número múltiplo de 4. Se for ímpar e suceder um múltiplo de 4 (o resto da divisão por 4 é 1) então é um triângulo branco (o elemento que no primeiro conjunto que se repete ciclicamente, está na primeira posição). Se for ímpar e anteceder um múltiplo de 4 (o resto da divisão por 4 é 3) então é um triângulo sombreado (o elemento que, no primeiro conjunto que se repete ciclicamente, está na terceira posição).

Vejamos o exemplo de algumas ordens consecutivas:

57	4	58	4	59	4	60	4	61	4
17	14	18	14	19	14	20	15	21	15
1		2		3		0		1	

Reconhecimento de padrões
Identificar padrões e realizar previsões com base nesses padrões.

$57 = 4 \times 14 + 1$ $58 = 4 \times 14 + 2$ $59 = 4 \times 14 + 3$ $60 = 4 \times 15$ $61 = 4 \times 15 + 1$

- É possível identificar regularidades nas figuras que ocupam posições múltiplas de 5. Os termos de posições que são múltiplos de 5 vão assumindo sucessivamente as figuras que se encontram nos quatro primeiros termos, repetindo-se ciclicamente. Podemos isolar os termos múltiplos de 5 e verificar esta regularidade:

5	10	15	20	25	30	35	40	…
$4 \times 1 + 1$	$4 \times 2 + 2$	$4 \times 3 + 3$	$4 \times 4 + 4$	$4 \times 5 + 5$	$4 \times 6 + 6$	$4 \times 7 + 7$	$4 \times 8 + 8$	
5×1	5×2	5×3	5×4	5×5	5×6	5×7	5×8	

Também podem surgir algumas estratégias erradas. Alguns alunos usam erradamente uma estratégia de utilização de múltiplos de 10, ao considerarem que os termos das ordens que são múltiplas de 10 são obtidas pela repetição dos 10 primeiros termos. Contudo, como 10 não é múltiplo de 4 essa relação nem sempre é válida. Por exemplo, no caso da 20.ª figura, de acordo com esta estratégia teremos um círculo branco, o que não está correto, já que o 20 é múltiplo de 4, o que faz com que o termo seja um círculo sombreado. Apenas no caso dos múltiplos de 10 que não são múltiplos de 4 é que essa estratégia conduz ao elemento correto da sequência.

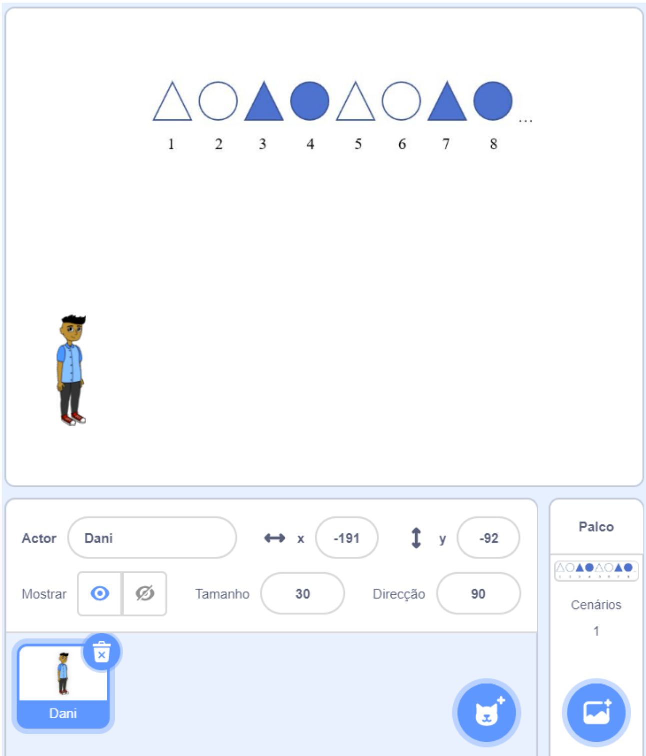
Depuração
Procurar e corrigir erros a partir da testagem das hipóteses formuladas.

Caso esta estratégia ocorra, é possível que os alunos não tenham presente que nem sempre é adequado utilizá-la, nem o porquê de umas vezes funcionar e noutras não, devendo o professor alertar para essa situação. Ainda que possa não estar ao alcance dos alunos, é importante que o professor tenha presente que apenas funciona quando o múltiplo de 10 é obtido por 10k, em que k é um número ímpar. Nesse caso, é possível escrever o número como $4j + 2$, sendo j um número natural, daí esta estratégia permitir obter a resposta correta nestes casos.

Exemplo de projeto no Scratch

São de seguida apresentados exemplos de projetos no Scratch que respondem ao solicitado na questão 2 da tarefa. O professor deve dar acesso ao início do projeto que tem já disponível o cenário com a imagem dos primeiros termos da sequência representados e os atores necessários, como se mostra a seguir:

https://scratch.mit.edu/projects/621956837



Os alunos devem criar um projeto que permita que qualquer número natural seja introduzido, que corresponde à ordem do termo pretendido, e que o ator devolva como resposta a essa ordem o termo correspondente.

A análise e a discussão dos projetos dos alunos são muito relevantes na aula, permitindo evidenciar:

- a possibilidade de interação com o utilizador usando o comando de pergunta e aguardar resposta: `pergunta (Como te chamas?) e espera pela resposta`;
- o papel do resto da divisão por 4 do número indicado pelo jogador, usando o comando disponível no conjunto dos operadores: `o resto de ( ) a dividir por ( )`;

Decomposição
Estruturar a resolução do problema por etapas de menor complexidade:
- posições divisíveis por 4 (resto 0);
- posições não divisíveis por 4, considerando cada um dos possíveis restos (resto 1, resto 2 e resto 3).

- o programa deve analisar se o resto da divisão do número indicado (a resposta) é igual a 0, 1, 2, por exemplo, ou por exclusão destas, igual a 3;

- o uso de condições: i) usar a condição *Se… então…* quatro vezes, ou ii) usar a condição *Se… então... senão…*, três vezes, uma vez que se analisam apenas duas situações – a proposição antecedente é verdadeira e o jogo retorna a resposta que se segue à expressão *então* ou a proposição antecedente é falsa e o jogo retorna a resposta que se segue à expressão *senão*:

;

- a importância da definição de um algoritmo que devolve a resposta correta, qualquer que seja o número indicado;

- a importância de testar o programa utilizando diversos números, pares e ímpares, e verificar a adequação da resposta devolvida pelo jogo.

Algoritmia
Desenvolver o procedimento passo a passo, de acordo com as etapas previamente identificadas, para solucionar o problema.

Depuração
Refinar e otimizar o processo criado, reduzindo o número de comandos a usar.

Depuração
Procurar e corrigir erros a partir da testagem do programa criado, verificando a ordem dos comandos e o cumprir do objetivo do jogo.

Exemplo de programa elementar de resposta direta

Neste projeto há apenas um ator que coloca a pergunta para ser indicado um número e devolve a resposta se é um triângulo branco, um círculo branco, um triângulo sombreado ou um círculo sombreado o elemento que está nessa posição na sequência. Este projeto pode ser consultado em

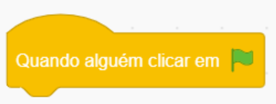
https://scratch.mit.edu/projects/621957462

Algoritmia
Desenvolver o algoritmo para solucionar o problema e implementá-lo num recurso tecnológico.

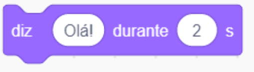
Programação para o ator que questiona

Comando utilizados	Programação

Evento

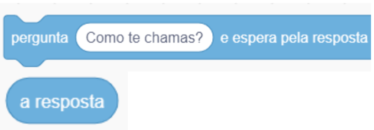


Aparência

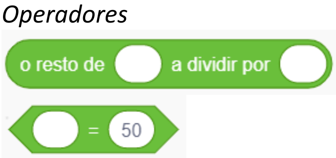


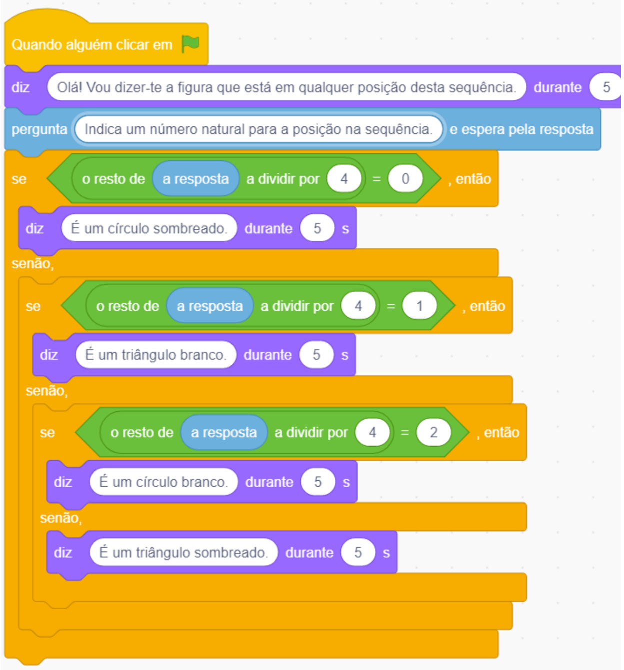
Controlo

Sensores



Operadores



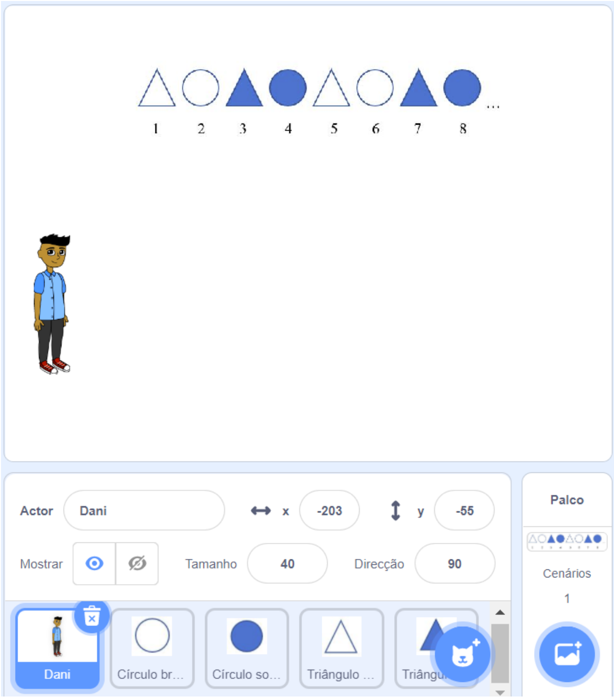


Exemplo de projeto em que os elementos da sequência também são atores

Neste projeto existem vários atores, o ator que questiona, um triângulo branco, um círculo branco, um triângulo sombreado e um círculo sombreado, como mostra a figura abaixo. Podem aceder ao projeto em:

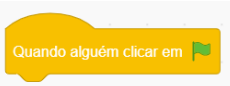
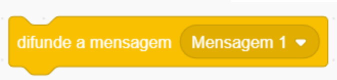
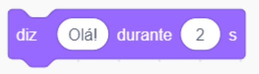
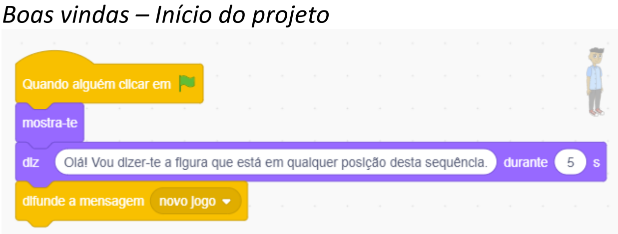
https://scratch.mit.edu/projects/455812176

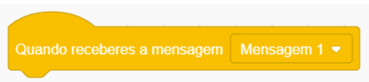
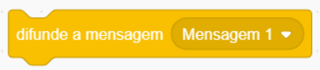
Algoritmia
Desenvolver o algoritmo para solucionar o problema e implementá-lo num recurso tecnológico.

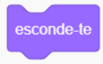
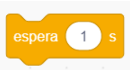
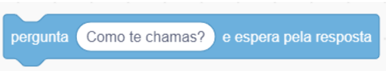


Cada um dos elementos da sequência deve ser um ator para que cada um deles possa ser programado de modo a surgirem quando o valor indicado corresponder a uma ordem em que esse elemento está. Se os alunos já tiverem experiência na utilização do Scratch podem ser eles a colocar as imagens no cenário e nos atores.

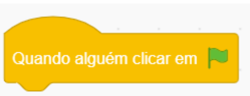
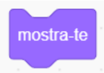
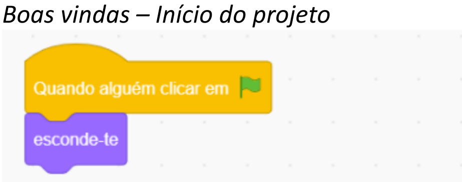
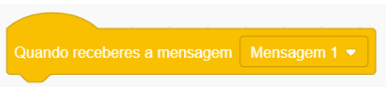
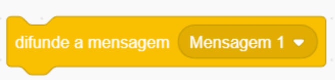
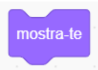
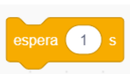
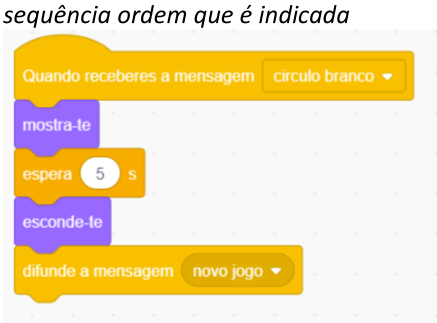
Programação para o ator que questiona

Comando utilizados	**Programação**
Evento   *Aparência*   	*Boas vindas – Início do projeto* 

Comando utilizados	**Programação**
Evento   *Aparência*  	*Ações do ator para iniciar o jogo e identificar o termo na sequência*

 *Controlo*   *Sensores*   *Operadores*  	

Programação para o ator que representa o círculo branco

Comando utilizados	Programação
Evento  *Aparência* 	*Boas vindas – Início do projeto* 
Evento   *Aparência*   *Controlo* 	*Ações do ator para aparecer quando é o termo da sequência ordem que é indicada* 

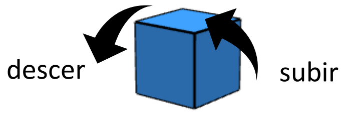
De modo análogo, com as devidas adaptações, deve ser feita a programação para os restantes atores que representam figuras da sequência.

SEQUÊNCIAS COM CUBOS

Tarefa

Parte I

Com apenas um cubo, construímos uma escada com um degrau, onde subimos uma vez e descemos uma vez.



Investiga que quantidade de cubos te permite construir diferentes escadas onde coloques apenas um pé em cada degrau, ao subir e ao descer a escada, e qual deve ser a disposição desses cubos. Atenção que não é possível dar passos que não sejam para subir ou descer degraus. Podes fazer as tuas experiências usando cubos ou a aplicação: https://toytheater.com/cube/. Regista as vistas de frente das tuas escadas numa folha quadriculada.

Parte II

1. Que número de cubos nos permitirá construir uma escada onde, colocando um pé em cada degrau, se subam 6 degraus e se desçam 6 degraus? Justifica a tua resposta.

2. É possível fazer uma escada com 80 cubos? Justifica a tua resposta.

Parte III

Sabendo o número de degraus de uma escada, é possível saber o número total de cubos usados na sua construção? Usa o Scratch e faz um programa que te diga o número total de cubos necessários, caso indiques o número de degraus de uma escada que pretendes construir.

Guião de exploração

Breve apresentação

Esta tarefa desenvolve a capacidade de visualização espacial dos alunos, nomeadamente a perceção de relações espaciais e explora regularidades. Pretende-se que os alunos façam construções com cubos e descubram que tipo de construções permitem construir escadas de acordo com as condições indicadas no enunciado da tarefa e analisem regularidades nas construções efetuadas. Esta tarefa pode ser realizada a partir do 2.º ano de escolaridade.

O tempo previsto para a resolução e discussão desta tarefa é de 150 minutos, podendo a Parte III ser realizada em momento posterior às partes I e II.

Enquadramento Curricular

Matemática

Capacidades matemáticas:

- Raciocínio (Conjeturar e generalizar, justificar)
- Comunicação (Expressão e discussão de ideias)
- Representações matemáticas (Representações múltiplas, Conexões entre representações, linguagem simbólica matemática)
- Conexões matemática (conexões internas)
- Pensamento computacional (Abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração)

Tema matemático: Geometria e Medida, Números e Álgebra

Tópicos/subtópicos:

- Orientação espacial: vistas e plantas
- Relações numéricas: factos básicos de multiplicação
- Regularidades em sequências: sequências de crescimento

Objetivos de aprendizagem

- Desenhar vistas de sólidos simples (vistas de cima, frente e lado)
- Compreender e automatizar os factos básicos da multiplicação (tabuadas do 2, 4, 5, 10 e 3)
- Identificar e descrever regularidades em sequências de crescimento, explicando as suas ideias
- Continuar uma sequência de crescimento, respeitando uma regra de formação dada ou regularidades identificadas
- Criar e modificar sequências, usando materiais manipuláveis e outros recursos, desenvolvendo o pensamento computacional

Orientações curriculares TIC

- Criar algoritmos de complexidade baixa para a resolução de desafios e problemas específicos

Recursos

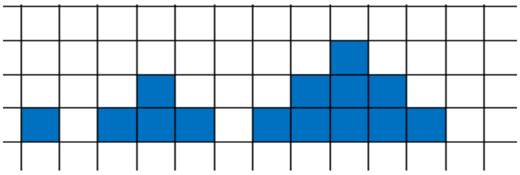
- Enunciado da tarefa
- Cubos de madeira ou de encaixe e/ou a aplicação https://toytheater.com/cube/
- Folha de papel quadriculado para registo (Anexo 1)

Orientações para a exploração

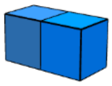
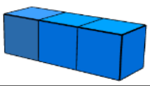
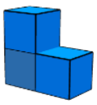
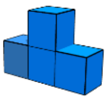
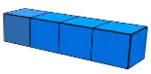
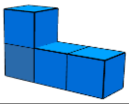
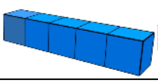
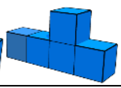
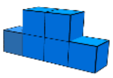
O professor deve iniciar a aula com a introdução da tarefa e desafiando os alunos a realizarem a Parte I autonomamente, a pares ou em pequenos grupos.

Na Parte I da tarefa pretende-se que os alunos percebam a estrutura da escada, aspeto fundamental para a realização da tarefa. Devem usar cubos para a construção das escadas e registar, em papel quadriculado (Anexo 1 da tarefa), a vista de frente das construções realizadas, como se exemplifica a seguir para três situações: subir e descer um degrau (1 cubo); subir e descer dois degraus (4 cubos); subir e descer três degraus (9 cubos).

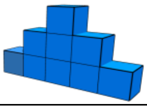
Abstração
Perceber as condições indicadas na tarefa e a noção de degrau.



Nesta fase, os alunos devem perceber que não é possível construir uma escada (de acordo com as condições indicadas na tarefa) com um qualquer número de cubos. Os alunos devem ser incentivados a construir escadas até ao mínimo de 3 degraus para poderem ter, pelo menos, três construções que cumpram as condições (1 degrau, 2 degraus e 3 degraus) e devem registar as suas descobertas de forma organizada. É desejável que os alunos realizem construções que não cumpram as condições enunciadas, para perceberem qual deve ser a estrutura da escada. Na tabela seguinte apresentam-se alguns exemplos:

N.º cubos	Construções	Número de degraus
1		1 degrau (Sobe um e desce um)
2		Não é possível, colocando um pé em cada degrau, subir e descer o mesmo número de degraus
3	 	
4	  	2 degraus (Sobe dois e desce dois) Apenas na primeira construção é possível formar uma escada em que, colocando um pé em cada degrau, se sobe e desce o mesmo número de degraus
5	 	Não é possível fazer construções em forma de "T" que cumpram as condições. Visualmente existe uma estrutura em "T" que se mantém em todas as escadas possíveis
6		
(…)	(…)	(…)

Decomposição
Selecionar um determinado número de cubos e explorar todas as construções possíveis.

9		3 degraus (Sobe 3 e desce 3)

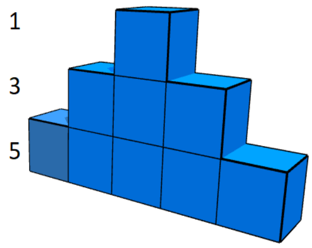
No caso em que se usam 4 cubos, apesar de ser possível fazer três construções, apenas uma cumpre as condições apresentadas na tarefa, aspeto este que deve ser discutido com os alunos. O professor pode questionar os alunos: "Comparando as construções já feitas, qual a construção que nos permite ir ao encontro das condições que estão no enunciado?".

A análise das construções com 1, 4 e 9 cubos permite encontrar algumas regularidades que, caso os alunos não consigam descobrir, o professor pode apoiar estas descobertas através do questionamento: "Que quantidade de cubos nos permite construir uma escada?", "Nesses casos, no total, quantos degraus se sobem e quantos degraus se descem?", "Em cada construção, quantos cubos tem cada linha (patamar)?", "Seria possível ter um patamar com 6 cubos? Porquê?", "Existe alguma relação entre cada construção?", "É possível construir uma escada conhecendo a escada anterior?", "Como consegues obter o número total de cubos de uma escada, sem contar?", "Que relação existe entre o número total de degraus que se sobem (ou descem) e o número total de cubos de uma escada?".

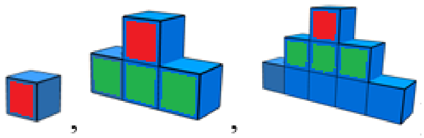
Reconhecimento de padrões
Analisar a estrutura das construções e descobrir padrões.

Através do questionamento sugerido anteriormente, os alunos devem perceber que:

- A soma do número total de degraus que se sobem com os que se descem é igual e é um número par;
- O número de cubos, por patamar, corresponde à sequência de números ímpares consecutivos;



- A figura anterior, está contida na figura seguinte:



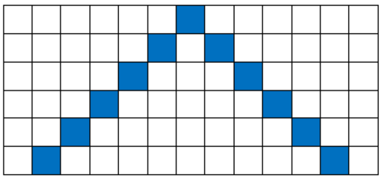
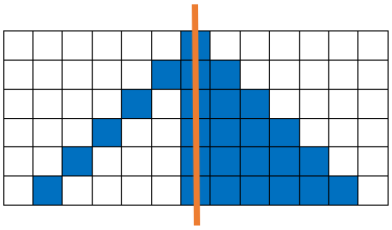
Estes padrões devem ser discutidos e registados pelos alunos usando múltiplas representações (visuais e matemáticas simbólicas ou textuais).

Abstração
Focar-se nos exemplos explorados na Parte I que cumprem as condições indicadas na tarefa.

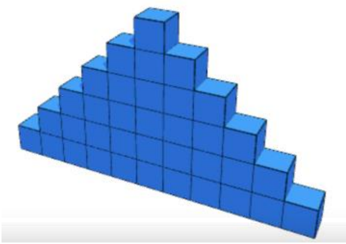
Após discutir com os alunos a Parte I da tarefa, a partir do trabalho que eles realizaram, o professor deve propor-lhes a realização da Parte II da tarefa. Na Parte II, para responder à questão "Que número de cubos nos permitirá construir uma escada onde, colocando um pé em cada degrau, se subam 6 degraus e se desçam 6 degraus? Justifica a tua resposta.", os alunos podem seguir como estratégia, desenhar e construir a escada ou organizar, numa tabela, os dados encontrados na Parte I.

O professor deve apoiar/incentivar a análise do trabalho já realizado pelos alunos, questionando-os: "Que construções realizaram na Parte I e que vos podem ajudar a responder às questões da Parte II?". Deve igualmente continuar a incentivar o registo das vistas de frente em papel quadriculado, a organização dos dados recolhidos na Parte I numa tabela e o uso de linguagem natural ou outro tipo de simbologia para expressar relações numéricas e regularidades.

Os alunos podem desenhar os degraus no papel quadriculado para subir 6 degraus e descer 6 degraus, como exemplificado a seguir.

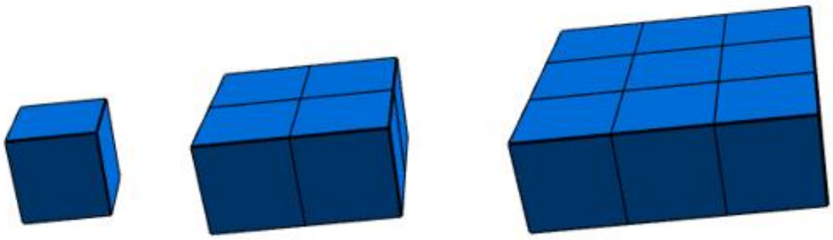

ou


Podem ainda construir com cubos (físicos ou virtuais) a escada:



Após a organização visual da escada, os alunos podem contar a totalidade dos cubos, por patamares (podendo associar cada patamar a um número ímpar de cubos) ou podem considerar a simetria da figura e contar apenas os cubos para construir cinco degraus de um dos lados, duplicar esse número e depois adicionar o número de cubos da coluna central. O número total de cubos é 36 (6x6).

A organização de dados numa tabela, permite apoiar a descoberta de relações entre o número de degraus a subir (ou descer) e o número total de cubos, bem como a procura da regra geral. Caso os alunos manifestem dificuldades, o professor pode lançar a questão: Será possível reorganizar a construção para construir um prisma com este número de cubos? Que tipo de prisma consegues construir? Os alunos verificam que a reorganização dos cubos das escadas permitem construir um prisma quadrangular com um cubo de altura, cuja área da base é $n \times n$ (a regra geral). O número total de cubos que permite fazer a escada de acordo com as condições indicadas resulta de um produto de dois fatores iguais ao número de degraus que se sobem (ou descem) 9, $n \times n$ (área da base de um prisma quadrangular com altura 1). Assim, este padrão corresponde visualmente à construção de um prisma quadrangular de volume $n \times n \times 1$.



(...)

Esta descoberta da regra geral é importante para a resolução da questão seguinte.

Sugestão de tabela:

número de degraus	número total de cubos
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
n	$n \times n$

Reconhecimento de padrões
Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução do problema que possam ser usados noutros problemas

Para a questão "É possível construir uma escada com 80 cubos?" existem várias estratégias e resoluções possíveis que se discutem de seguida.

Possíveis estratégias e resoluções:

Usando o produto de fatores iguais:

- 5 x 5 = 25; 6 x 6 = 36; 7 x 7 = 49; 8 x 8 = 64; 9 x 9 = 81
- ou partindo de 10 x 10 = 100 e ao ser superior a 80, passa para o produto de fatores iguais anterior 9 x 9 = 81

Nesta estratégia evidencia-se que os alunos reconhecem que o número total de cubos se obtém através do produto de dois fatores iguais (regra geral).

Adicionando *números ímpares consecutivos, correspondentes ao número de cubos por patamar:*

Podem começar com 3 patamares: 1 + 3 + 5 = 9 e a partir daqui adicionar consecutivamente o número de cubos do patamar que se acrescenta em baixo até chegar próximo de 80 cubos*:*

9 + 7 = 16*;*

16 + 9 = 25*;*

25 + 11 = 36*;*

36 + 13 = 49*;*

49 + 15 = 64*;*

64 + 17 = 81 (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 81)

Nesta estratégia evidencia-se que o número de cubos de cada patamar é um número ímpar e que o número total de cubos se obtém através da adição de números ímpares consecutivos.

As estratégias apresentadas permitem perceber que não é possível construir uma escada com 80 cubos. Só é possível construir uma escada com 81 cubos, que tem 9 degraus para subir. A estratégia que se apresenta de seguida é uma possível estratégia que não conduz à solução correta e que deve ser discutida com os alunos, caso surja.

Como o número de degraus que se sobe e o número de degraus que se desce é sempre igual, o aluno divide por 2 o número total de cubos que surge na questão ($80 : 2 = 40$). Perante esse raciocínio, o professor pode solicitar que reveja as escadas que construiu anteriormente. Por exemplo:

- numa escada com 9 cubos sobem-se 3 degraus, mas $9 : 2$ não é igual a 3. Como representar a situação?
- numa escada com 16 cubos sobem-se 4 degraus, mas $16 : 2$ não é igual a 4. Como representar a situação?

Caso esta resolução surja, o professor deve focar a atenção do aluno no modo como se obtém o número total de cubos, apelando à visualização dos prismas ou à relação entre o número de degraus e o número total de cubos.

Após discutir com os alunos a Parte II da tarefa, os alunos podem realizar a Parte III de imediato, ou num outro momento que não na mesma aula.

A Parte III, permite incentivar a criação de um algoritmo simples e um projeto no Scratch, usando a regra geral descoberta na exploração das partes anteriores da tarefa. Uma possibilidade para a construção do projeto em Scratch é criar uma programação simples que, ao ser indicado qualquer número de degraus de uma escada pelo utilizador, seja devolvido o número total de cubos da construção respetiva. Desse modo, os alunos têm de perceber que para devolver o número de degraus é preciso recolher a *resposta* ao número de degraus a subir que a escada tem e fazer *resposta* x

Depuração
Procurar e corrigir erros e testar uma dada resolução, em função do contexto do problema.

Abstração
Generalizar a relação entre o número de degraus e o número total de cubos em linguagem natural (pseudocódigo).

Reconhecimento de padrões
Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução do problema.

resposta para obter o total de cubos necessários, ou seja, *número de degraus* x *número de degraus*.

Um primeiro passo para a construção deste projeto em Scratch, pode passar pelo questionamento do professor de modo que os alunos consigam generalizar: “Que relação existe entre o número de degraus a subir e o número total de cubos das construções que cumprem as condições indicadas na tarefa?”. Os alunos devem ser incentivados a registar, em linguagem natural, a generalização (e.g., O número total de cubos é igual ao número de degraus vezes o número de degraus).

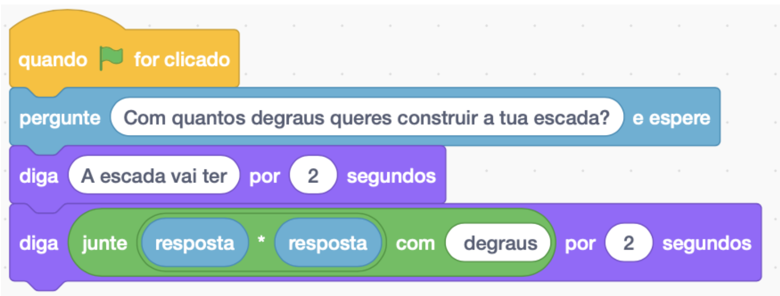
Apresentam-se de seguida duas possibilidades de projeto Scratch. Ambos os projetos permitem saber o número total de cubos necessários, caso se indique o número de degraus a subir na escada que se pretende construir. Pode aceder a cada exemplo através do link ou por Código QR. Apresenta-se também a estrutura da programação visual por blocos em Scratch.

No projeto 1 não estão visíveis as variáveis e o aluno tem sempre de reiniciar o programa se quiser continuar a procurar o número total de cubos para um determinado número de degraus a subir na escada.

Algoritmia
Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo que este possa ser implementado em recursos tecnológicos.

Projeto 1

https://scratch.mit.edu/projects/505268836



No projeto 2, as variáveis estão visíveis e usando os ciclos de repetição, o aluno pode testar continuamente números naturais diferentes.

Projeto 2

https://scratch.mit.edu/projects/505025923

Sequências com cubos Anexo 1 – Quadriculado

3. REFERÊNCIAS

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, R.G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico*. ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Carvalho, R., Branco, N., & Espadeiro, R. G. (2021). MatemaTIC: Um projeto-piloto para integração do pensamento computacional no 1.º ciclo do ensino básico. *Educação e Matemática, 162*, 60-64.

Espadeiro, R. G. (2021). O pensamento computacional no currículo de matemática. *Educação e Matemática, 162*, 5-10.

Ministério da Educação (2017). *1.º ciclo do ensino básico: Orientações curriculares para as tecnologias da informação e comunicação*. ME-DGE. http://erte.dge.mec.pt/sites/default/files/oc_1_tic_1.pdf

Ministério da Educação (2017). *Perfil dos alunos à Saída da escolaridade Obrigatória.* ME-DGE http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

4. RECURSOS

Code Builder - Math Playground. https://www.mathplayground.com/code_builder.html.

Geoboard - Math Learning Center. https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/.

Pattern Blocks - Math Playground. https://www.mathplayground.com/pattern-blocks.html.

Pattern Shapes - Math Learning Center. https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/.

Cube - Toy Theater. https://toytheater.com/cube/.

Scratch. https://scratch.mit.edu/.

APM
Associação de Professores de Matemática

APM Centro Formação