

## DIFERENTES REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS: EXPLICITAR AS CONCEPÇÕES DOS ALUNOS E GERIR POSSÍVEIS CONFLITOS COGNITIVOS

**Maria Graciete Costa Brito**

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém  
mgcbrito@gmail.com

### Resumo

O estudo dos números racionais tem-se revelado ao longo da escolaridade básica de difícil compreensão pelos alunos e também de difícil gestão didáctica pelos professores. Muitos são os alunos que terminam o ensino básico sem terem apreendido os diversos significados com que um número racional pode ser usado ou as diferentes formas de o representar.

O Programa de Matemática do Ensino Básico, que no ano lectivo de 2010-2011 será implementado em todas as escolas, explicita de forma muito clara, quer nos objectivos a atingir pelos alunos, quer nas indicações metodológicas destinadas aos professores, que a abordagem aos números racionais deve ser feita tendo em atenção estas componentes essenciais para uma verdadeira compreensão do sentido do número racional.

Este artigo pretende exemplificar como é que uma tarefa matemática pode ajudar a explicitar possíveis concepções erradas dos alunos acerca do sentido e da ordem de grandeza dos números racionais e também como, através do conflito cognitivo, podem ser confrontados com as suas concepções e terem a possibilidade de compreender diferentes representações de um mesmo número. O artigo traduz a reflexão feita acerca da tarefa por uma formadora do Programa de Formação Contínua em Matemática, após acompanhamento de várias aulas em que a mesma foi desenvolvida por diversas turmas do 6ºano de escolaridade e reflectida com os professores em formação.

**Palavras-chave:** Formação de professores; Reflexão do professor; Prática lectiva; Aprendizagem dos números racionais.



## Abstract

Rational numbers study has revealed to be difficult to understand by students through basic school, as well as their didactic management by teachers.

Many students finish basic school without learning the different meanings in which a rational number can be used, or the different representations.

Mathematics Programme for Basic Education, which will be implemented in all Portuguese schools in 2010-2011, is very clear in the objectives to be attained by the students, as well as in the methodology indications given to the teachers. The approach to the rational numbers must attend these essential components to a true understanding of meaning.

This article intends to exemplify how a mathematical task may help to explain possible students' misconceptions about the meaning and value of rational numbers and also, as through cognitive conflict, they can be confronted with their misconceptions and have the possibility to understand the different representations of a number. The article presents teacher reflections about this task, implemented in 6<sup>th</sup> grade classes, after several coaching and discussion sessions coordinated by teachers' trainers.

**Keywords:** Teachers training; Reflection; Teaching practice; Learning racional numbers.

## Introdução

No âmbito da do Programa de Formação Contínua para Professores de Matemática dos 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> ciclos (PFCM) assume particular relevância a concretização em sala de aula de tarefas matemáticas que proporcionem práticas inovadoras, essencialmente de resolução de problemas ou de natureza exploratória, e que envolvam uma ampla participação dos alunos. Estas tarefas são previamente trabalhadas com os professores em sessões conjuntas de formação, nas suas componentes científica e didáctica, bem como no seu enquadramento curricular face ao Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), que em 2010/2011 será generalizado a todos os ciclos de ensino que o constituem.

O objectivo deste artigo é a apresentação de uma dessas tarefas, sobre a qual

foi elaborada uma reflexão contemplando as seguintes vertentes:

1. Aspectos matemáticos a aprofundar com os professores formandos;
2. Objectivos gerais do ensino da Matemática, objectivos gerais de aprendizagem de ciclo/tema e específicos do Programa de Matemática, que poderão enquadrar a tarefa;
3. Principais dificuldades dos alunos na resolução da tarefa;
4. Explicitação de aspectos relativos à utilização da tarefa em sala de aula: estrutura da aula, organização dos alunos, tempo de realização da tarefa, tempo de discussão da tarefa, materiais a usar e outros aspectos.
5. Razões para sugestão da realização da tarefa em sala de aula;
6. Possíveis reformulações no quadro do PMEB;
7. Sugestões para extensão da tarefa para utilização por alunos de outros anos de escolaridade;
8. Conexões possíveis com outros tópicos do PMEB.

A reflexão incide sobre as referidas vertentes, mas coloca a ênfase na explicitação da adequação da tarefa aos tópicos matemáticos e objectivos do PMEB, assim como aos contributos da sua realização para o desenvolvimento das capacidades transversais de desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática.

A tarefa tem vindo a ser proposta para realização e reflexão nas sessões de formação do 2º ciclo do PFCM de Santarém desde o ano lectivo de 2006/2007, embora sujeita a reformulações nos anos que se sucederam. Foi aplicada em sala de aula em algumas turmas do 6º ano de escolaridade desde esse ano lectivo. Contudo, neste artigo tomarei como ponto de partida uma aplicação em sala de aula no âmbito de uma aula supervisionada do PFCM, no ano lectivo de 2007/2008. Procurarei explicitar, seguidamente, porque foi sentida após reflexão, a necessidade da sua reformulação e como é que a mesma ocorreu.

### **A Tarefa – Diferentes Representações dos Números Racionais**

A tarefa<sup>1</sup> foi apresentada aos professores sob a forma de um conjunto de

---

<sup>1</sup> Tarefa adaptada de: Swan, M. (2001). Dealing with misconception in mathematics. In P. Gates (Ed.)



etapas, que lhes permitissem fazer o percurso desde a sua preparação para a apresentarem aos alunos, até à posterior reflexão. Envolve o trabalho com múltiplas representações de números racionais e promove a discussão sobre o significado de cada número.

### **1. Tornar explícitos os conceitos existentes**

Escreve os seguintes números decimais por ordem crescente.

0,75    0,4    0,375    0,25    0,125    0,04    0,8

Escreve os seguintes números fraccionários por ordem crescente.

Explica com pensaste.

$\frac{3}{4}$      $\frac{3}{8}$      $\frac{2}{5}$      $\frac{8}{10}$      $\frac{1}{4}$      $\frac{1}{25}$      $\frac{1}{8}$

Outra intenção desta tarefa é tornar explícitas as possíveis concepções erradas dos alunos e não responder de imediato às questões. Por isso, dê tempo aos alunos para compararem e descreverem os seus métodos, sem indicar se as respostas são ou não correctas.

### **2. Partilha de métodos e produção a partir da “discussão de conflitos”**

Em seguida, constitua grupos de trabalho de dois ou três alunos, de modo que os alunos sejam constituídos por alunos com respostas diferentes, de forma a tornar as discussões mais ricas.

Distribua a cada grupo o seguinte conjunto de cartões (anexo 1).

Para começar distribua apenas os conjuntos de A a D. Os alunos deverão agrupar Os alunos poderão considerar relativamente fácil fazer a correspondência entre os cartões (A, B) e (C, D) mas, combinar os quatro poderá tornar-se difícil.

Seguidamente distribua, se considerar necessário, os cartões do conjunto E.

Depois, os alunos deverão colocar os números por ordem crescente, retomando a tarefa inicial.

### **3. Um convite à reflexão**

Ao reflectir sobre a implementação desta tarefa tente responder às seguintes questões:

- ✚ Até onde é que esta aula expôs obstáculos conceptuais na comparação entre decimais e fracções?
- ✚ Existiu algum conflito cognitivo evidente? Como se manifestou?
- ✚ Como é que os alunos desenvolveram a sua compreensão ao longo da aula?
- ✚ Como é que os alunos reagiram a esta tarefa, emocionalmente?

### **4. Extensão**

Planifique agora uma tarefa idêntica com números racionais superiores à unidade.

## **A Tarefa na Formação de Professores do 2º Ciclo**

Esta tarefa foi planificada para a uma sessão de trabalho sobre os números racionais, após ter sido abordada a problemática dos múltiplos significados do número fraccionário e das dificuldades e obstáculos enfrentados pelos alunos do ensino básico na respectiva compreensão – desde o conceito de número racional às suas diferentes formas de representação.

A intencionalidade da sua apresentação prendeu-se com o desenvolvimento da compreensão das relações entre as diferentes representações dos números, através de um processo de matematização progressiva em que o aluno, entrando em conflito com as suas concepções erradas, constrói o conhecimento e valida os seus argumentos. Por outro lado, esta abordagem dá a possibilidade de participação activa dos alunos na construção da sua aprendizagem matemática – organizando, estruturando, relacionando, justificando.

Também privilegia as conexões matemáticas, na medida em que representações diferentes (parte/todo, recta numérica, decimal, fracção), tal como em situações da realidade, aparecem relacionadas.

## **Enquadramento no Programa do Ensino Básico**

Apesar de a tarefa não ter tido enquadramento inicial no PMEB, parece-me inteiramente adequada tendo em conta, em primeira análise, o que na apresentação



dos “Temas Matemáticos e Capacidades Transversais” é referido:

*“Uma alteração importante em relação ao programa anterior é que as representações fraccionária e decimal dos números racionais surgem agora em paralelo. Em cada situação o aluno deve ser capaz de usar a representação mais adequada, mas deve igualmente ser capaz de passar com facilidade de uma representação para outra. Além disso, a representação dos números na recta numérica adquire também uma importância significativa.” (p. 7)*

Esta ideia é também abordada, de uma forma mais geral, nas “Orientações metodológicas gerais”:

*“As representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação. Os alunos necessitam, por isso, de adquirir desembaraço a lidar com diversos tipos de representação matemática no trabalho com os números (...) Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada.” (p. 9)*

As orientações metodológicas são retomadas nas relativas ao 2º ciclo, onde se refere que: “(...) é de fazer o estudo paralelo entre as representações decimal e fraccionária, evidenciando as vantagens e desvantagens de cada uma delas em situações concretas” (p. 33).

Considero que, sem a realização pelos alunos de algumas tarefas em que as diferentes representações dos números racionais sejam exploradas, dificilmente esta facilidade de passagem de uma representação para outra poderá ocorrer. Por outro lado, os professores do 2º ciclo tendem a privilegiar a representação fraccionária, desenvolvendo sobretudo competências ao nível da operatória e dos procedimentos em contextos matemáticos formais, sem colocarem a ênfase no desenvolvimento do sentido de número aliado a situações da realidade, para as quais a representação decimal é, normalmente, a mais adequada.

O “Propósito principal de ensino” para o tópico programático em que a tarefa se insere – Números e Operações – é explícito ao referir, em todos os ciclos, que é fundamental “Desenvolver nos alunos o sentido de número (...)” (p.13, 32, 48). Não é raro que os alunos consigam operar com os símbolos numéricos sem que tenham claramente uma ideia das quantidades e conceitos que lhes estão subjacentes. O trabalho desenvolvido pelos professores deve, por isso, envolver contextos próximos

da realidade dos alunos, em que lhes sejam dadas oportunidades para que essa realidade seja ponto de partida para construções matemáticas, que numa primeira fase podem ser informais.

A importância das representações é reforçada nos “Objectivos gerais do ensino da Matemática” que “numa formulação mais próxima do trabalho da disciplina (...) procuram tornar mais explícito o que se espera da aprendizagem dos alunos (...)” (p. 4):

*“Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diferentes representações. Isto é, devem ser capazes de:*

*(...)*

- *traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra (...)*

*Os alunos devem conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e seleccionar a representação mais adequada à situação.” (p. 5)*

Estes objectivos gerais apresentam-se desdobrados na seguinte hierarquia:

*Objectivos gerais de aprendizagem:*

- “Compreender e ser capazes de usar propriedades dos números inteiros e racionais
- Ser capazes de apreciar a ordem de grandeza de números...” (p. 32)

*Objectivos específicos:*

- “Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas
- Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas” (p. 33).

Contudo, não é apenas do ponto de vista das finalidades, objectivos e orientações metodológicas que considero a adequação da tarefa ao Novo Programa, como explicitarei nos pontos seguintes.

### **Preparação da Implementação da Tarefa**

Foram bastante enfatizados junto dos professores em formação os contributos



da estratégia a implementar para o desenvolvimento da compreensão e da comunicação matemática.

O desenvolvimento do raciocínio, através da compreensão dos conceitos e dos procedimentos, o saber “porquê” e “para quê” em cada momento da aprendizagem é o primeiro passo para uma verdadeira consolidação do conhecimento matemático. Por outro lado, numa tarefa onde é solicitado aos alunos que expressem as suas formas de pensar e que, numa fase posterior, as partilhem com os outros, está explícito um acentuado contributo para o desenvolvimento da comunicação, que promove o desenvolvimento do pensamento matemático, através não só da escrita dos procedimentos mas da respectiva verbalização e da argumentação para defesa das suas ideias.

Na reflexão sobre a tarefa foi abordada a necessidade de tornar explícitas as possíveis concepções erradas dos alunos e de não responder de imediato às questões, mesmo quando os resultados não são os esperados. O tempo que se dá aos alunos para compararem e descreverem os seus métodos é importante na construção do próprio conhecimento. É importante que o professor de matemática aprenda a gerir a sua eterna luta contra o tempo, aprendendo que aquele que dá aos alunos é tempo que vai ser posteriormente recuperado, quando uma nova aprendizagem se evidenciar facilitada.

A estratégia de realização da tarefa aponta para um momento de trabalho individual, seguido de um outro de trabalho em pequeno grupo. São duas metodologias de trabalho que devem ser usadas, tal como é referido no PMEB:

*“O aluno deve procurar ler, interpretar e resolver tarefas matemáticas sozinho, bem como ler, interpretar e redigir textos matemáticos. Em muitas situações, na sala de aula, os alunos também trabalham em pares que é um modo de organização particularmente adequado na resolução de pequenas tarefas, permitindo que os alunos troquem impressões entre si, esclareçam dúvidas e partilhem informações.” (p. 10)*

A tarefa apresenta também uma componente de manipulação de materiais facilitadores da compreensão. Os cartões com as diferentes representações dos números racionais permitem a exploração de uma situação em que não há procedimentos de rotina e em que a atenção dos alunos se deve dirigir para a descoberta de uma estratégia e avaliação dos resultados encontrados.

Além destes aspectos, foi debatido o tempo de realização da tarefa, para a qual se revelava indispensável a ocupação dos noventa minutos, sendo que a primeira fase

não deveria ocupar mais do que meia hora, incluindo a apresentação da tarefa pelo professor, com a clarificação do que era pretendido.

### Dificuldades dos Alunos

A tarefa foi implementada em turmas do 6º ano, numa fase em que já estava a ser trabalhada a operatória com números fraccionários, sendo assim de considerar que o conceito de número fraccionário estava consolidado, bem como a equivalência entre as representações sob a forma de fracção e sob a forma decimal. Contudo, revelaram-se muitas dificuldades na realização da primeira parte da tarefa, mesmo na ordenação dos números na forma decimal. Muitos alunos ordenaram-nos como se se tratasse de números inteiros, outros consideraram que um número é tanto maior quanto maior for o número de casas decimais que apresenta, como se evidencia nas produções seguintes:

1. Escreve os seguintes números decimais por ordem crescente.

$0,75$	$0,4$	$0,25$	$0,125$	$0,8$
$0,4$	$0,8$	$0,85$	$0,75$	$0,125$

Explica como pensaste.

*... a que tinha mais algarismos*

Na forma de fracção apenas os ordenaram correctamente os que efectuaram a redução ao mesmo denominador, evidenciando que dominam um procedimento de rotina para a comparação de números fraccionários, mas não deixando explícito se possuem a noção de grandeza de cada um.

2. Escreve as seguintes fracções por ordem crescente.

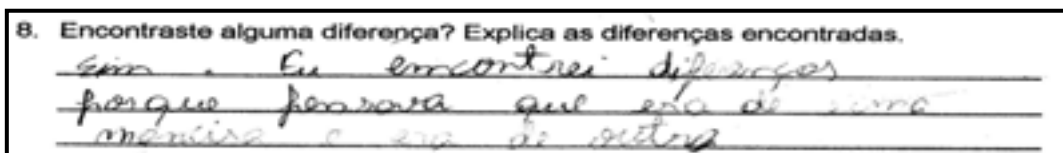
$\frac{3}{4}$	$\frac{30}{40}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{30}{40}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{32}{40}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{10}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{40}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$					

Explica como pensaste.

*... a que tinha mais algarismos*  
*... a que tinha mais algarismos*

Os alunos, duma maneira geral, envolveram-se empenhadamente na realização da segunda parte da tarefa e o recurso aos cartões foi fundamental para a posterior ordenação dos números. Não evidenciaram dificuldade na comparação entre a representação esquemática parte/todo, a representação fraccionária e a decimal, apesar de por vezes se surpreenderem com a correspondência entre fraccionário e decimal. A maior dificuldade foi a correspondência com algumas representações na recta numérica, em especial quando o número não correspondia a uma divisão exacta do segmento representativo da unidade (por ex. 0,4 no conjunto C de cartões). Após estabelecidos os conjuntos de cartões representativos de cada número, não manifestaram dificuldade de ordenação, apesar de ser evidente que se orientaram sempre pela representação esquemática (parte/todo contínuo), o que possibilita que se infira que, sem este primeiro grupo de cartões, a tarefa se apresentaria com maior dificuldade.

Um momento fundamental foi a da reconstrução pelos alunos da primeira tarefa – o confronto dos resultados obtidos com o que tinha sido a sua primeira realização. Manifestou-se aqui um conflito cognitivo evidente, que pode ter sido um relevante factor na construção desta aprendizagem – os números racionais podem representar-se de diferentes formas e que essas diferentes representações podem ajudar na compreensão da sua grandeza relativa



O tempo de realização da tarefa (90 minutos) foi escasso. Os professores sentiram necessidade de retomar o assunto na aula seguinte, de forma a poderem explorar melhor cada situação surgida e a possibilitarem a cada grupo a expressão das suas dificuldades e das conclusões a que chegaram.

### Reformulação da Tarefa

No ano lectivo seguinte, foi entendimento da equipa de formadores que deveriam ser introduzidas algumas alterações na tarefa de forma a possibilitar a introdução de outras representações, nomeadamente a de números superiores à unidade, o esquema parte/todo para conjuntos discretos e a representação em percentagem.

Foi uma forma de se alargar a discussão com os formandos acerca destas representações e, simultaneamente, voltar a integrar as diferentes concepções de número racional. Prevendo que se tornasse mais morosa, foi acordada com os formandos a sua realização com um máximo de cinco números.

### **Conexões Entre Tópicos Programáticos**

A compreensão da forma como os conceitos matemáticos se relacionam entre si é um dos aspectos relevantes do ensino da Matemática, que deve estar presente em todos os contextos formativos. Os professores do 2º ciclo apresentam formações académicas muito diferenciadas o que, por vezes, os conduz a uma visão excessivamente compartimentada dos conteúdos, que não lhes permite explorar a matemática presente em cada situação sob variadas perspectivas e em relação a mais do que um conceito. De acordo com PMEB:

*“Os alunos devem reconhecer a Matemática como um todo integrado, estabelecendo conexões entre aquilo que já aprenderam e aquilo que estão a aprender em cada momento, mas também ser capazes de a usar em contextos não matemáticos. O estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar.” (p. 6)*

A tarefa apresentada permite estabelecer conexões entre os números decimais e os números fraccionários e poderia ser alargada ao estudo das percentagens, ao conceito de razão e à proporcionalidade. Na resolução de problemas de natureza multiplicativa com escalas e percentagens e nos problemas de “receitas” o domínio das diferentes representações dos números racionais é fundamental.

As diferentes representações dos números também devem ser ligadas à resolução de problemas geométricos, em que a relação com conceito de medida tem um lugar privilegiado. A exploração de valores aproximados de um número é particularmente importante quando este é uma dízima infinita periódica ou quando se pretende estimar uma medida. A este respeito refere o PMEB que “(...) a medida continua a ser explorada ao longo do 2º ciclo, relacionando-a com os números racionais (...)” (p.36).

### Nota final

A reflexão sobre o enquadramento desta tarefa no Programa de Matemática do Ensino Básico permitiu um maior aprofundamento do tópico sobre os números racionais e proporcionou a inclusão na formação de referências mais consolidadas sobre o que se espera da aprendizagem matemática relativamente ao desenvolvimento do sentido de número e à construção dos conjuntos numéricos.

### Referências Bibliográficas

DGIDC (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico.

Swan, M. (2001). Dealing with misconception in mathematics. In P. Gates (Ed.) *Issues in mathematics teaching* (1.<sup>a</sup> ed.). (pp. 147-165). London: Routledge Falmer.

### Anexo 1

