REPÚBLICA DEMOCRÁTICA DE SÃO TOMÉ E PRÍNCIPE
Instituto Superior de Educação e Comunicação

Metodologia do Ensino da Matemática

Guia de Formação Contínua

Ministério da Educação, Cultura e Ciência.
São Tomé e Príncipe, um país melhor para todos através da cultura e da educação

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Ministério da Educação, Cultura e Ciência
São Tomé e Príncipe, um país melhor para todos através da cultura e da educação

Equipa nacional do Ministério da Educação

Coordenação

Direção Geral do Planeamento e Inovação Educativa
- Mirabel Ribeiro
- Marisa Costa

Direção do Ensino Básico
- Ana Varela
- Deolinda Carvalho
- Helena Botelho

Instituto Superior de Educação e Comunicação
- Maurício Lana
- Maria de Lurdes Rodrigues
- Carlos Castro
- Jorge Bom Jesus

Equipa Técnica Santomense

Direção Geral do Planeamento e Inovação Educativa
- Bleizy Costa
- Isaulina Santos
- Jaylsan Castro
- Carlos Castro
- Uraca Cotrim
- Ècela Carvalho

Metodologia do Ensino da Língua Portuguesa
- Esmael Fernandes
- Inácia Sousa
- Antónia Luisa Silva
- Leonilda da Mata
- Tibúrcia Major
- Nelson Campos
- Alberto Vasconcelos

Metodologia do Ensino da Matemática
- Amândio Afonso
- Madalena Nascimento
- Eugénio Vaz
- Isidoro Rosa Monte

Colaboração de:
- Hernâni Teixeira
- Anatália Vilhete
- Adelina Rosa

Metodologia do Ensino das Ciências Naturais e Sociais
- Armanda Cunha
- Helena Maquengo Bandeira
- Isabel Narciso
- Filipa Sacramento
- Gustava Silva
- Uroginita Silva

Metodologia do Ensino das Expressões
- Maria de Lourdes Rodrigues
- Adinex da Costa
- Lídia Barbosa
- Maria Georgina da Costa
- Maria Tomé Reis
- Ricardina Rodrigues
- Lázaro Vicente
- Herculano Lopes
- Atanásio da Mota

Colaboração de:
- Nilza Cotrim

Necessidades Educativas Especiais
- Ana Maria Vera Cruz
- Luís Filipe Neves
- Selnaine Vera Cruz
- Lídia Barbosa

Organização e Supervisão da Prática Pedagógica
- Armanda Cunha
- Ana Maria Branco
- Maria Inácia Sousa
- Adriana Neto
- Anastácio Quintas
- Álvaro Santos
- Bleizy Costa
- Isidoro Rosa Monte

Formação de Directores e Centros de Recursos
- Abel Conde
- Maria Pedro das Neves
- Gustavo Silva
- Jerónimo Salvaterra
- Maria Pedro das Neves
- Gustavo Silva

Escola Superior de Educação [IPSantarém]

Apoio Técnico

Coordenação do Projecto
- Maria João Cardona

Coordenação gráfica
- Jean Campiche

Formação de Directores e Centros de Recursos
- Dina Rocha
- Fernando Costa
- Maria João Cardona
- Ramiro Marques

Metodologia do ensino das Expressões
- António Mesquita Guimarães
- Célia Barroca
- Jean Campiche
- Margarida Togtema
- Teresa Cavalheiro

Metodologia do ensino da Língua Portuguesa
- Ana Fonseca
- Leonor Santos
- Madalena Teixeira

Metodologia do ensina da Matemática
- Ana Fonseca
- Neusa Branco
- Susana Colaço

Metodologia do ensino das Ciências Naturais e Sociais
- Bento Cavadas
- Ramiro Marques

Organização e Supervisão da Prática Pedagógica
- Isabel Piscalho
- Leonor Santos
- Madalena Teixeira
- Susana Colaço

Necessidades Educativas Especiais
- Isabel Piscalho
- Ramiro Marques

Índice

Índice de Figuras

Índice de anexos

1. Introdução

A formação dos professores das 1.ª à 6.ª classes em Matemática deve contemplar o desenvolvimento do seu conhecimento matemático para ensinar e o conhecimento do ensino da Matemática. Assim, neste documento são discutidos alguns aspectos centrais do ensino da Matemática e aprofundados conceitos matemáticos essenciais para o desenvolvimento desse ensino, focando o contexto curricular em que se desenvolve. Este documento é a base para um curso de formação de professores cuja organização e cujos elementos de avaliação se encontram no Anexo 1.

Nos programas da área da Matemática destas classes é destacada a importância da apropriação do conhecimento matemático por todas as crianças e jovens. Deste modo, os professores devem desenvolver o seu conhecimento para promover a aprendizagem dos seus alunos nos vários conteúdos integrados em cada domínio: números e operações, geometria, grandezas e medida, estatística e proporcionalidade.

Este documento foi construído tendo por base as mais recentes orientações internacionais sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática e visando proporcionar aos formandos diversas actividades que promovam a compreensão desse processo. Tem como objectivo apoiar o trabalho dos formadores na sua actividade no âmbito da formação contínua de professores da 1.ª à 6.ª classes. Nesse sentido, neste documento optou-se por iniciar cada secção com uma abordagem mais teórica, clarificando conceitos e discutindo ideias-chave sobre o ensino-aprendizagem da Matemática. Seguem-se a esta primeira parte propostas de trabalho com os formandos que envolvem pesquisas, leituras, análise e construção de tarefas, análise de produções escritas de alunos e de situações de sala de aula.

Este documento resulta de pesquisas teóricas e de um trabalho de recolha de dados junto de professores e professoras que apresentaram as estratégias e dificuldades dos alunos, problemas relacionados com o ensino e a aprendizagem e sugestões para o trabalho em sala de aula.

O documento contempla a discussão dos seguintes aspectos:

- Aspectos do desenvolvimento curricular em Matemática, salientando o papel do professor na gestão do currículo;
- "Saber mais sobre…", discutindo ideias fundamentais relativas ao conhecimento profissional do professor, dando destaque a componentes essenciais para a sua prática lectiva com exemplos de situações concretas do trabalho do professor e dos alunos;
- Orientações para o ensino da Matemática, apresentando o papel do professor na escola, situações concretas para a planificação do ensino-aprendizagem e para a organização do ambiente educativo;
- Ensinar e aprender Matemática, focando todos os temas matemáticos a trabalhar da 1.ª à 6.ª classes, com ênfase no conhecimento matemático para ensinar e no conhecimento didáctico.

Ao longo de todo o documento também é dada particular importância aos recursos a utilizar em sala de aula pelo professor e pelos alunos. Assim, as potencialidades e a sua utilização em sala de aula vão sendo apresentadas e discutidas ao longo dos vários capítulos, remetendo a construção desses recursos, muitas vezes inexistentes nas escolas, para a **secção dos anexos**. Nesta secção são apresentadas formas diversas para o professor poder construir os materiais didácticos recorrendo a desperdício, material do quotidiano, etc. Além disso, são também apresentadas diversas **sugestões de bibliografia e recursos digitais** que podem ser consultados, quer para o professor aprofundar os seus conhecimentos, quer para aceder a outras tarefas e programas de computador de utilização livre para implementar em sala de aula.

2. Gestão curricular

> *Cada vez se compreende melhor, e se exige mais, que, em educação em geral, e, no ensino, de uma disciplina em particular, currículo tenha um significado amplo e seja encarado como um conjunto organizado de objectivos, orientações metodológicas, conteúdos e processos de avaliação. Mudar os conteúdos matemáticos de um currículo não significa mudar o ensino: objectivos generosos podem perigar se se mantiverem inalteradas as metodologias e as formas de avaliação, assim como qualquer mudança metodológica pode ser fortemente dificultada se os conteúdos não forem alterados. Isso não significa que basta mudar o currículo para que o ensino e a aprendizagem se modifiquem; porém, qualquer proposta de renovação curricular, se não quiser, desde logo, ficar condenada ao insucesso, tem que contemplar, equilibrada e articuladamente, o conjunto das componentes curriculares atrás referidas.* (APM, 1988, p.15)

A gestão curricular, ou seja, a forma como o professor interpreta e desenvolve o currículo, tem a ver com a planificação da prática lectiva que o professor elabora, de modo a criar pontes entre o mundo da criança e o que a escola pretende ensinar. Nesta (re)construção do currículo, o professor deve ter presentes as características dos alunos, os recursos existentes e o contexto social e cultural em que a escola se insere.

Uma eficaz gestão curricular depende da perspectiva integrada que se tem do programa (finalidades, objectivos, conteúdos e capacidades transversais a desenvolver nos e com os alunos), da diversidade de actividades e tarefas que se propõe, da forma como se organiza o trabalho dos alunos para realizarem essas mesmas tarefas e actividades, dos recursos que se utiliza e do ambiente que cria. Por outro lado, o professor deverá planificar dando atenção às aprendizagens dos alunos realizadas anteriormente e às conexões que se podem estabelecer entre as diversas áreas disciplinares de aprendizagem, no sentido de proporcionar percursos de aprendizagem coerentes e que permitam aos seus alunos a construção de conceitos com base na compreensão dos procedimentos matemáticos.

Actividade 2.1. A

Leia o Capítulo 2 do livro *Renovação do Currículo em Matemática* (APM, 1988) e discuta com os colegas:

a) o papel do currículo;

b) a importância das orientações para a prática do professor.

Actividade 2.1. B

Leia o texto de Ponte (2005) e discuta o papel do professor na gestão do currículo.

3. Saber mais sobre…

A aprendizagem da matemática decorre do que é ensinado e aprendido na escola, em articulação com os conhecimentos prévios que a criança adquiriu através das suas vivências familiares e sociais. Por outro lado, a aprendizagem dos alunos acontece a partir das actividades que desenvolvem, dependentes das tarefas que o professor propõe, que integram a mobilização e o desenvolvimento de capacidades e conhecimentos.

A aula de Matemática é marcada pela tarefa e pela comunicação que se estabelece na sala de aula, entre professor e alunos e entre os alunos, estando estes dois aspectos relacionados com o papel do professor e o papel do aluno na aula. As tarefas e a comunicação são identificadas como elementos estruturantes da prática do professor de Matemática por Ponte, Quaresma e Branco (2012). Deste modo, o professor de cada turma necessita de uma estratégia própria, sendo necessário um trabalho meticuloso na preparação das aulas, bem como na experimentação das tarefas e dos recursos, identificando durante a aula problemas que surgem na comunicação e no ambiente da aula. Além disso, a avaliação sobre a prática e sobre as aprendizagens que os alunos concretizam, ou não, dá informação relativa aos conhecimentos que os alunos desenvolveram, às dificuldades que demonstraram, bem como sobre as suas preferências e os seus interesses (Ponte & Serrazina, 2000).

3.1. A aula de Matemática

A aula de Matemática pode ter uma dinâmica expositiva ou exploratória, sendo sobre esta última que se irá desenvolver o presente capítulo.

No ensino expositivo, o professor assume o papel central na apresentação dos conceitos e na exemplificação de procedimentos. Nestas aulas os exercícios (definidos como tarefas de resposta rápida e de aplicação de conceitos previamente trabalhados) são as tarefas predominantes. O aluno tem um papel menos activo na sua aprendizagem, sendo o seu trabalho ouvir a explicação do professor, escrever no caderno os conceitos, os procedimentos e os exemplos da aplicação desses conceitos e procedimentos, seguindo-se um momento de realização de exercícios de consolidação relativos a esses conteúdos. Aqui a comunicação faz -se, essencialmente, num único sentido, ou seja, do professor para os alunos. Este tipo de aula tem conduzido ao desinteresse dos alunos pelo conhecimento matemático e a uma compreensão limitada desta disciplina. Embora consiga aplicar esses procedimentos, o aluno nem sempre compreende porque os aplica e ao conhecimento matemático que lhe está subjacente, nem tão-pouco procede à explicitação do raciocínio.

Pelo contrário, um ensino exploratório, mais inovador, em que o professor desafia os seus alunos a envolverem-se em actividades matemáticas diversificadas pode proporcionar uma aprendizagem da matemática com compreensão (Ponte, 2005). No ensino exploratório a comunicação envolve o professor e os alunos, sendo importante o questionamento à turma por parte do professor e a participação dos alunos na discussão dos conceitos e estratégias. Além disso, os alunos envolvem-se na realização de tarefas mais complexas e desafiantes, como a resolução de problemas, tarefas de exploração, de investigação e projectos. Também no ensino exploratório há lugar à realização de exercícios, mas este tipo de tarefas não é exclusivo ou dominante no trabalho de sala de aula. O aluno assume, assim, um papel activo na construção do saber durante a sua actividade na sala de aula, tendo o professor um papel de organizador e dinamizador da aprendizagem. No desenvolvimento da aula existem diversos momentos com diferentes dinâmicas em que professor e alunos trabalham de diferentes modos (Canavarro, 2011) e que ocupam diferentes períodos de tempo na aula, podendo estes ser variáveis mas com uma distribuição próxima da apresentada na Figura 1:

Introdução:	**Trabalho autónomo:**	**Discussão colectiva:**	**Síntese:**
Organização dos alunos e apresentação da tarefa.	Os alunos fazem trabalho individual, em pares ou em pequenos grupos e o professor apoia.	Apresentação das resoluções pelos alunos e sua discussão, em que tanto professor como alunos questionam.	Foco no conhecimento matemático.

Figura 1. Esquema de aula de ensino exploratório

Quando o professor propõe uma das tarefas ao aluno, existe um primeiro momento que respeita à compreensão do que é solicitado. O professor deve promover a interpretação do que é pedido sem dar pistas aos alunos que retirem o desafio ou indiquem um único caminho ao aluno. A este momento segue-se o momento de trabalho dos alunos, em que estes, individualmente ou em pequenos grupos, procuram resolver a tarefa. Durante este tempo o professor acompanha o trabalho que os alunos estão a fazer, questionando sobre o que estão a fazer e porquê. Assim, o professor tem oportunidade de identificar se os alunos estão com dificuldades e de apoiá-los a ultrapassá-las, bem como verificar as estratégias e representações que eles estão a usar. É importante que o professor conheça o trabalho que os alunos estão a fazer para tomar decisões sobre o que vai discutir no momento seguinte. Findo o trabalho autónomo, o professor deve propor a discussão das resoluções e das ideias matemáticas envolvidas e a sistematização das aprendizagens. O professor deve identificar as resoluções a serem apresentadas pelos alunos à turma, tendo em conta os seus objectivos de aprendizagem. Pode considerar diferentes critérios, como seleccionar resoluções que usam representações ou estratégias diferentes. O professor tem aqui um papel determinante, pois cabe-lhe seleccionar e organizar as apresentações, questionar os alunos para que eles expliquem o seu raciocínio aos colegas, promover a participação da turma, podendo os alunos questionar quem apresenta e dar contributos para a clarificação de conceitos, e moderar a discussão. Desta discussão podem emergir as ideias matemáticas que devem no final ser sistematizadas de modo a que os alunos as percebam e as possam mobilizar em novas situações. Os registos são também importantes na discussão e na sistematização, pelo que o professor deve indicar claramente se os alunos devem registar resoluções apresentadas por colegas, bem como as ideias matemáticas trabalhadas.

Assim, o professor deve preparar a sua aula considerando as aprendizagens que pretende promover e o modo como essas aprendizagens se vão tornar efectivas, sendo essencial para tal escolher as tarefas adequadas para dar aos alunos os recursos a usar. Além disso, deve planificar as acções principais a concretizar durante a aula, uma vez que "são as acções dos professores que encorajam os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções" (NCTM, 2007, p. 19). Como exemplo ilustrativo, apresenta-se no Anexo 2 uma planificação para introdução do conceito de perímetro, utilizando uma estratégia de carácter essencialmente expositivo e outra baseada no ensino exploratório.

Actividade 3.1. A

1. Seleccione uma sequência de aulas por si planificadas e concretizadas sobre um determinado conteúdo. Analise-as, em colectivo, de acordo com os seguintes tópicos:

   – Tipo de dinâmica conferida (ensino expositivo e/ou ensino exploratório) e organização dos alunos;

   – Selecção das tarefas (de acordo com os objectivos pretendidos, com as características dos alunos e com os recursos);

   – Momentos da aula previstos (introdução da tarefa por parte do professor, compreensão da actividade/tarefa por parte dos alunos, realização da tarefa pelos alunos, registos a realizar/construir, discussão dos resultados obtidos);

2. Indique e analise ainda as acções que desenvolveu durante as aulas, no sentido de promover uma efectiva aprendizagem, e se assumiu um papel de organizador e dinamizador da mesma e permitiu que o aluno tivesse um papel de construtor do seu saber.

3.2. A experiência matemática

O professor de Matemática tem de proporcionar actividades diversificadas aos seus alunos que sejam experiências matemáticas significativas e que promovam um percurso de aprendizagem coerente. De acordo com o NCTM (2007), "os alunos aprendem matemática através das experiências que os professores proporcionam" (p. 17). O professor tem, então, a responsabilidade de seleccionar tarefas que propiciem aos alunos experiências de aprendizagem diversificadas e com sentido, tendo em conta os objectivos de aprendizagem. Por exemplo, uma actividade que resulte de uma tarefa de rotina pode contribuir para a consolidação de conhecimentos e destrezas já adquiridas, mas não contribui para o desenvolvimento de novos conhecimentos.

A aula de Matemática vai ter uma dinâmica diversificada consoante a natureza das tarefas que o professor propõe aos alunos (estrutura aberta ou fechada e grau de dificuldade reduzido ou elevado) (Ponte, 2005). É importante que os alunos sejam colocados perante tarefas de natureza distinta, pois todas elas são importantes e todas contribuem para o desenvolvimento de conhecimentos e capacidades essenciais na aprendizagem da matemática. As figuras 2, 3 e 4 apresentam tarefas de natureza diferente que surgem nos cadernos de actividades e manuais.

1. Considera o seguinte numeral:

37 205

Qual é o algarismo de ordem 2? ______________________
Qual é o algarismo de ordem 0? ______________________
Quantas unidades representa o algarismo 7?____________

Figura 2. Exemplo de um exercício (retirado do caderno de actividades da 4.ª classe, p. 91)

1. Durante um dia, numa fábrica de cacau, preparam-se:
28,7 kg de cacau com laranja
63,85 kg de cacau com grão de café
14,6 kg de cacau em tablete

- Calcula o número de embalagens que se podem encher com cada produto, sabendo que: cada saco leva 12 kg de cacau/laranja

Figura 3. Exemplo de um problema (retirado do caderno de actividades da 4.ª classe, p. 138)

Com palhinhas de refresco vais tentar construir os triângulos com as medidas indicadas nas situações descritas a seguir. Corta as palhinhas de acordo com os comprimentos indicados na tabela:

Comprimento das palhinhas (cm) / Situação)	a	b	c
1.ª	10	5	3
2.ª	10	4	6
3.ª	10	5	8
4.ª	10	3	8
5.ª	10	1	2

Figura 4. Exemplo de uma investigação (retirado do manual da 6.ª classe, p. 34)

Assim, de acordo com o NCTM (1994), na escolha das tarefas o professor deve seleccionar as que:

- *apelem à inteligência dos alunos;*
- *desenvolvam a compreensão e as aptidões matemáticas dos alunos;*
- *estimulem os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas;*
- *apelem à formulação e à resolução de problemas e ao raciocínio matemático;*
- *promovam a comunicação sobre matemática;*
- *mostrem a matemática como uma actividade humana permanente;*

- *tenham em atenção e assentem em diferentes experiências e predisposições dos alunos;*
- *promovam o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer matemática.* (p. 27)

O professor pode também propor jogos que envolvam conteúdos matemáticos. Além disso, tem de pensar nos recursos a usar, pois em muitas situações de ensino-aprendizagem estes podem dar um contributo importante para a aprendizagem, desde que a sua utilização seja adequada e mediada pelo professor, que tem de ter um bom conhecimento desses recursos, de modo a potencializar a sua exploração em sala de aula, permitindo a sua exploração por parte dos alunos. A manipulação de materiais é de extrema importância nesta faixa etária, uma vez que, sendo os conceitos e relações matemáticos abstractos, estes recursos podem facilitar a concretização das ideias matemáticas. É possível construir diversos recursos, em particular materiais manipuláveis, reutilizando material do dia-a-dia em conjunto com colegas e com a colaboração dos alunos. No final deste guia encontram-se diversos exemplos de materiais didácticos que apoiam a aprendizagem e que se pode construir com materiais do quotidiano.

O professor deve propor também experiências matemáticas que proporcionem o trabalho com diferentes representações, permitindo compreender cada uma e como se relacionam entre si. Algumas situações devem possibilitar que se use a representação simbólica e outras em que os alunos recorram a desenhos, gráficos ou esquemas para encontrar uma solução. Em tarefas mais abertas alguns alunos podem usar um tipo de representação enquanto outros alunos usam outro tipo de representação. Nesta situação, o professor pode propor a apresentação e discussão dos dois modos diferentes de representar, verificando com os alunos se ambos são ou não válidos, e relacionando-os entre si, caso seja possível. Vários exemplos de representações a usar nos primeiros anos podem ser consultados na brochura *Experiência Matemática* (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Identificamos na Figura 5 representações dos alunos.

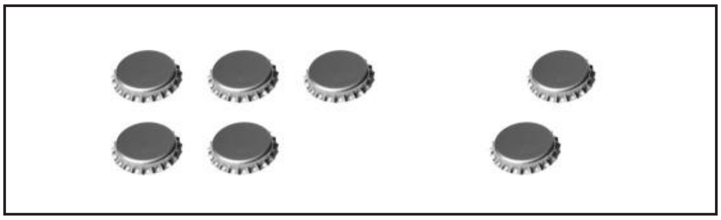


Figura 5. Representação activa – O aluno representa o número 7 com material manipulável para realizar a subtracção (7 – 2)

Além disso, nas experiências matemáticas que se proporcionam aos alunos, é importante contemplar quer situações matemáticas, quer situações que se relacionam com o quotidiano. A conexão entre a Matemática e outras áreas do saber contribui para que os alunos compreendam a importância da Matemática no progresso da sociedade e desenvolvam a sua capacidade de interpretar e usar ideias matemáticas em contextos diversificados. Existem várias situações que podem ser mobilizadas para o ensino da Matemática relacionadas com a história da matemática ou outras áreas. Por exemplo, os origamis podem ser realizados para trabalhar conteúdos matemáticos. O origami é uma arte japonesa que consiste na dobragem de papel. As dobragens possibilitam o surgimento de formas e de propriedades matemáticas. As situações a explorar podem partir da análise do objecto construído ou das dobragens realizadas, envolvendo conceitos e propriedades matemáticas, e o desenvolvimento de capacidades transversais como a comunicação matemática. Como refere Ilda Rafael (2011) no seu artigo sobre origami:

> *Ao longo das muitas sessões em que utilizei o Origami, dentro ou fora da sala de aula, pude concluir que o Origami melhora significativamente a comunicação matemática. Essa melhoria nota-se bastante nos alunos dos primeiros anos de escolaridade. Termos como "vértice", "bissectriz", "mediatriz", "diagonal", "reflexão", "simetria", são adquiridos com a prática das dobragens de uma forma natural e rapidamente fazerem parte do vocabulário dos alunos porque se tornam indispensáveis para a comunicação entre eles* (p. 21).

O ensino da matemática envolve numerosos conceitos e processos, cujo domínio é essencial para atingir os objectivos curriculares. O desenvolvimento do saber matemático no aluno implica o desenvolvimento dos processos que, de acordo com Ponte e Serrazina (2000), poderão ser agrupados do seguinte modo (e acordo com o nível de ensino, da 1.ª à 6.ª classe):

- *Representar (inclui compreender e usar símbolos, convenções, gráficos, etc);*
- *Relacionar e operar (inclui calcular e deduzir, dois dos processos matemáticos mais característicos, bem como relacionar ideias matemáticas diversas e interpretar ideias matemáticas em situações do dia-a-dia);*
- *Resolver problemas e investigar situações matemáticas e extra-matemáticas;*
- *Comunicar, recorrendo a diferentes linguagens e suportes.* (p. 39)

Actividade 3.2. A

1. De cada um dos seis manuais seleccione uma unidade didáctica e classifique as tarefas apresentadas aos alunos, de acordo com as características referidas no presente ponto (exercício, problema, exploração/investigação).
2. Das tarefas que analisou indique os recursos que poderão ser utilizados (estruturados ou construídos). No caso dos construídos, apresente sugestões de construção, utilizando materiais existentes em São Tomé e Príncipe.

3.3. Resolução de problemas

De acordo com o NCTM (2000), os alunos devem desde cedo aprender a resolver problemas em Matemática, pois deste modo irão adquirir hábitos de pensamento, persistência e auto-confiança. A resolução de problemas deve ser transversal a todos os domínios da Matemática, podendo ser uma forma de estabelecer conexões entre os vários domínios.

Segundo Kantowski (1997), um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou com uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos imediatamente disponíveis. Assim, e de acordo com esta definição, um aluno quando é confrontado com um problema será estimulado a pensar em estratégias que permitam a sua resolução e poderá através do mesmo construir novos conhecimentos matemáticos.

Os problemas podem ser de contextos do quotidiano dos alunos ou então de contextos matemáticos. Há ainda que distinguir entre questão (apela à capacidade de memória), exercício (é necessário treinar ou reforçar algoritmos aprendidos) e problema (implica raciocínio e síntese do que já foi aprendido). De notar que uma mesma situação poderá representar um exercício ou um problema, de acordo com o nível de aprendizagem. Considere-se o seguinte exemplo:

O José come quatro bolachas por dia. Quantas bolachas come ele ao fim de uma semana?

Para um aluno que conhece a multiplicação, esta situação é um exercício, mas, para um aluno da 1.ª classe, que não conhece nem o conceito nem a tabuada da multiplicação, esta situação é um problema.

Polya (1945) refere que existem quatro etapas fundamentais na resolução de um problema, que o professor deve trabalhar as mesmas com os seus alunos:

Etapa 1 – Compreender o enunciado do problema;

Etapa 2 – Conceber um plano (estratégia);

Etapa 3 – Realizar o plano;

Etapa 4 – Reflectir e analisar o trabalho feito.

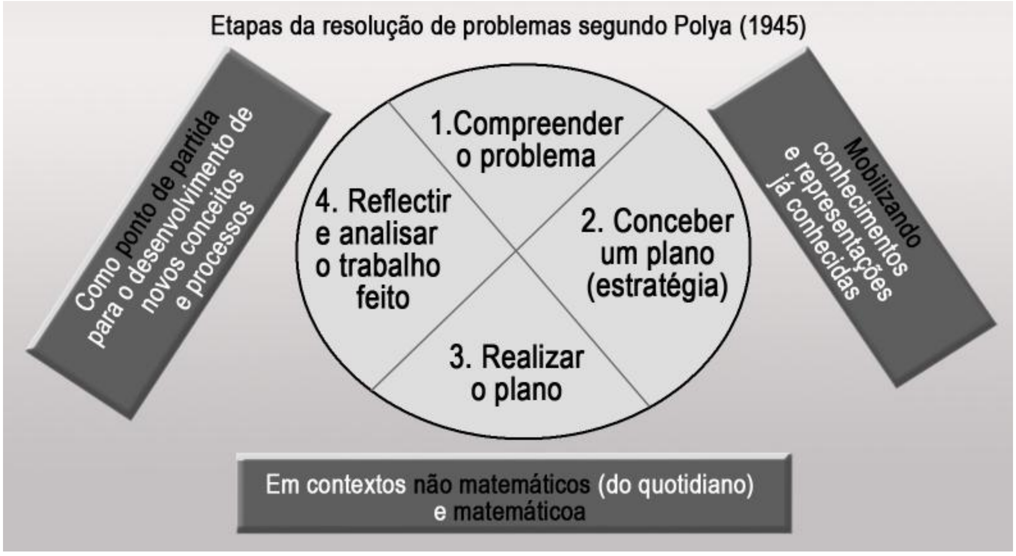


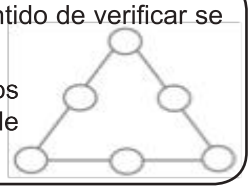
Figura 6. Etapas de resolução de um problema (Polya, 1945)

De acordo com a investigação em educação matemática os alunos normalmente começam por recorrer a desenhos ou a palavras para resolver problemas e gradualmente vão recorrendo, com a ajuda do professor a esquemas, diagramas, tabelas, gráficos ou operações, de acordo com a evolução do seu conhecimento matemático.

As estratégias para resolver problemas são variadas, dependendo também do problema que é proposto. Exemplos de estratégias de resolução de problemas podem ser consultados na brochura *Experiência Matemática* (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008). Observe-se apenas algumas como exemplos:

● **Tentativa e erro** (resolução através de tentativas de um modo orientado, no sentido de verificar se a solução encontrada satisfaz o problema):

Este triângulo com círculos é um triângulo mágico. Basta que se disponham os números de 1 a 6 nos círculos, sem os repetir, para que cada lado some 9. Onde deverá ficar cada um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6?



● **Partir do fim para o princípio** (estratégia adequada quando se conhece o ponto de chegada e o que se quer saber é o ponto de partida):

O José levou para a escola um saco de chocolates para dar aos amigos. Aos primeiros que encontrou deu metade dos rebuçados que trazia. Depois encontrou mais amigos e deu metade dos que ainda tinha. Quando chegou à sala só tinha 20, um para cada colega. Quantos chocolates tinha o saco antes de o José o abrir?

20 + (2 x 20) = 20 + 20 = 40 40 x 2 = 80

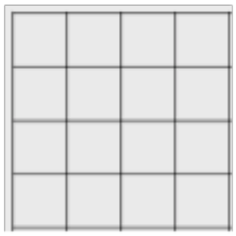
● **Simplificar um problema** (recorre-se à utilização de objectos para concretizar ou à dramatização da situação):

A mãe da Maria pediu-lhe para arrumar a louça numa prateleira, seguindo as suas indicações: os copos ao lado das facas; os pratos entre as tigelas e os copos; as colheres mais à esquerda; as tigelas entre os pratos e as colheres. Ajuda a Maria a arrumar a louça nos locais indicados.

● **Criação de um problema equivalente**:
Quando o problema tem números muito grandes, pode-se substituí-los por números menores, de modo a transpor o raciocínio para o problema inicial.

● **Utilização de casos mais simples ou particulares**:
Quantos quadrados existem na figura?

Para simplificar, pode ser resolvido inicialmente com uma figura mais simples, por exemplo um quadrado com apenas quatro quadrículas de lado.



● **Identificação de regularidades ou regras** (são exemplos os problemas que têm uma sequência subjacente):

1	2	3									
2	4										

Quantas rodas terão 12 motas?

Uma vez preenchidas as primeiras colunas da tabela, os alunos poderão procurar a lei da formação que os fará chegar à solução.

Actividade 3.3. A

Seleccione um problema resolvido pelos seus alunos e analise:

a) Se existem diferentes formas de resolução, indicando quais e que representações são usadas;

b) Se a resolução do mesmo respeitou as etapas definidas por Poyla.

3.4. Argumentação e justificação matemáticas

No processo de aprendizagem da matemática é fundamental os alunos desenvolverem a capacidade de comunicar as suas ideias matemáticas, recorrendo à utilização de vocabulário adequado e da simbologia matemática. Ao comunicarem o seu pensamento matemático sobre uma dada situação, os alunos reflectem sobre ela, sobre o seu próprio pensamento e sobre as suas formas próprias de resolver problemas, o que os ajuda a fazer conexões e a clarificar conceitos (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008).

Por outro lado, o ensino e a aprendizagem têm de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias, de conceitos e representações matemáticas. Ouvir e praticar são actividades importantes na aprendizagem da Matemática, mas também são igualmente importantes o fazer, o argumentar e o discutir. O professor deve dar especial atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas, proporcionando na sua prática a formulação e o teste de conjecturas matemáticas, bem como fomentar a justificação de raciocínios, usando conceitos e procedimentos matemáticos.

> *A argumentação abrange conversações de carácter explicativo ou justificativo, em que assumem um papel preponderante a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a formulação, teste e prova de conjeturas e a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático.* (Boavida, *et al*., 2008, p. 84).

Na sala de aula, a argumentação desenvolve-se como um conjunto de interacções que remete para o carácter social da argumentação e para a importância do outro no desenvolvimento das actividades argumentativas. De facto, quando se fala em argumentação em Matemática, não podemos deixar de considerar a quem se dirige e quem quer influenciar aquele que argumenta, que pode ser um grupo de colegas ou a turma na sua globalidade.

O professor tem um papel fundamental para ajudar os alunos a apropriarem-se dos saberes matemáticos reconhecidos como válidos pela matemática e em criar as condições propícias para a motivação dos alunos para a argumentação. Cabe ao professor, através de um discurso questionador, baseado na procura dos porquês, incentivar os alunos a justificarem, a explicarem, a fundamentarem o seu pensamento, bem como devolver aos alunos a responsabilidade da validação das afirmações.

> *Um ambiente de aprendizagem em que seja comum os alunos explicitarem as suas formas de pensar, e argumentarem e contra-argumentarem em torno dos seus raciocínios, ao invés de ser o professor a ajuizar a correcção de uma dada afirmação, é um factor que contribui para o desenvolvimento, nos alunos, da sua capacidade de demonstrar* (Harel & Sowder, 2007, *in* Rodrigues, 2007, p.34).

As situações a propor aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos. Por outro lado, é fundamental os alunos terem momentos em que se exprimam com liberdade, sem se sentirem constrangidos pelo olhar colectivo da turma ou do professor. Dar tempo e saber esperar pela resposta do aluno a uma questão formulada, envolver o maior número de alunos na discussão e aprender a lidar com respostas erradas são outros aspectos essenciais a que o professor deverá estar atento.

Actividade 3.4. A

1. De cada manual seleccione uma tarefa que permita a promoção da comunicação e, consequentemente, que apele para o desenvolvimento da capacidade de argumentação, fundamentando a sua escolha.

2. Em colectivo seleccione uma das tarefas que possa ser aplicada nas várias classes; efectue o registo do desenvolvimento da mesma na sua classe e compare com os dos seus colegas, no sentido de concluírem sobre a progressão da capacidade de argumentação de acordo com a faixa etária e o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

3.5. A avaliação em Matemática

A avaliação tem um papel importante na aferição das aprendizagens dos alunos, mas também como regulador do ensino. Assim, a informação que o professor recolhe por meio de inúmeros instrumentos que tem à sua disposição permite-lhe verificar as aprendizagens dos alunos, mas deve essencialmente contribuir para melhorar as aprendizagens dos alunos (NCTM, 2007). Com base nessa informação, o professor pode identificar aspectos que é preciso retomar na sala de aula, aprofundando esse trabalho com os alunos e ajudando-os a ultrapassar as suas dificuldades. A avaliação não pode nunca ser encarada como um processo de punição.

A avaliação deve contemplar três naturezas: a diagnóstica, a formativa e a sumativa. A avaliação diagnóstica permite que o professor, no início do ano ou no início de um tema, conheça os conhecimentos prévios dos alunos relativamente a alguns conceitos ou procedimentos específicos, no sentido de melhor planificar a sua acção. A avaliação formativa permite saber o conhecimento dos alunos sobre os conteúdos leccionados e se, por exemplo, conseguem mobilizar esses conhecimentos para resolver novas situações. Nesta avaliação é importante que o professor retire implicações relativamente à aprendizagem dos alunos e à sua prática. Para promover uma melhoria nas aprendizagens dos alunos, o professor deve fazer comentários às tarefas de avaliação. Esses comentários podem envolver questões ou sugestões que ajudem o aluno a compreender as características de uma resposta correcta e completa, a identificar o que não fez correctamente e que conhecimento precisa de aprofundar e em que sentido. Relativamente à prática do professor, esta avaliação ajuda o professor a tomar decisões sobre os conteúdos a leccionar e o modo de o fazer:

> *As decisões tomadas pelos professores, relativas ao ensino (sobre como e quando rever matérias que constituem um pré-requisito, como fazer a revisão de um conceito difícil, ou como adaptar tarefas para alunos mais fracos ou para aqueles que precisam de enriquecimento adicional), baseiam-se em inferências acerca daquilo que os alunos sabem e daquilo que necessitam de aprender* (NCTM, 2007, pp. 24-25).

Este tipo de avaliação, extremamente importante, permitirá ao professor auxiliar os alunos no sentido de sanar as dificuldades encontradas por eles, fazendo com que avancem na aprendizagem, mantendo-os informados sobre a evolução das mesmas, no sentido de se sentirem mais à vontade, menos ansiosos e responsáveis pela sua própria aprendizagem. É uma avaliação contínua, que se faz diariamente e em todas as situações, e que permite que o professor verifique constantemente se os alunos estão a aprender e a perceber, bem como se a sua própria planificação está a resultar e a contribuir para a aprendizagem dos seus alunos.

Pelo seu lado, a avaliação sumativa consiste em determinar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos, com vista a ser efectuado um balanço das aprendizagens, exprimindo, geralmente, resultados através de uma escala que podem ser complementados por uma informação descritiva.
As tarefas de avaliação que o professor propõe aos alunos devem ser coerentes com o modo de trabalho na sala de aula e os conhecimentos e capacidades que pretende valorizar. Apresenta-se de seguida uma síntese dos tipos de avaliação:

Tipo	Momento	Instrumentos mais utilizados
Diagnóstica	• Início do ano lectivo • Início de um novo conteúdo	• Questionários orais • Testes escritos
Formativa	• Ao longo do processo de ensino e aprendizagem	• Grelhas de observação e registo • Trabalhos produzidos pelo aluno (em grupo ou individualmente – trabalhos de pesquisa e investigação, resolução de problemas, entre outros)
Sumativa	• Final do ano, período lectivo ou unidade didáctica	• Testes escritos • Análise do caderno do aluno • Questionários orais

Na secção dos **anexos deste documento** poderá analisar alguns exemplos de avaliação (Anexo 3).

Actividade 3.5. A

Seleccione um conteúdo do programa e construa 3 instrumentos diferentes para efectuar a avaliação, atendendo aos principais momentos do processo de avaliação (NCTM, 1998, in Ponte & Serrazina, 2000, p. 225): (i) estabelecer objectivos; (ii) planear a avaliação; (iii) recolher evidências usando diversos métodos; (iv) interpretar as evidências fazendo inferências; (v) tomar decisões e agir.

4. Orientações gerais para o ensino da Matemática

4.1. Domínios curriculares em Matemática e capacidades transversais

Neste documento temos em atenção os domínios da Matemática que são contemplados nos programas de ensino nacionais para o 1.º ciclo (1.ª à 4.ª classes) e para o 2.º ciclo (5.ª e 6.ª classes) na área da Matemática:

1.º ciclo	2.º ciclo
Números e Cálculo Geometria Grandezas e Medida	Números e Operações Geometria Estatística Proporcionalidade

O ensino da Matemática nos vários domínios deve ter em vista objectivos gerais que possibilitem o desenvolvimento nos alunos de conhecimentos e capacidades em Matemática e o gosto pela Matemática:

- Saber os factos e procedimentos básicos da Matemática;
- Compreender conceitos, algoritmos, procedimentos e relações;
- Representar e interpretar ideias matemáticas;
- Comunicar oralmente e por escrito ideias e interpretar as ideias dos outros;
- Raciocinar matematicamente;
- Resolver problemas;
- Estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e entre estes e situações não matemáticas;
- Realizar actividades matemáticas de modo autónomo;
- Desenvolver o gosto pela actividade matemática.

A Matemática visa ainda o desenvolvimento de capacidades transversais a todos os anos, sendo respeitados a progressão da dificuldade de acordo com a faixa etária e o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Assim, as capacidades transversais são as seguintes:

Resolução de problemas	Raciocínio matemático	Comunicação matemática
• Compreensão do problema • Concepção, aplicação e justificação de estratégias	Justificação • Argumentação • Formulação e teste de conjecturas	• Interpretação • Representação • Expressão • Discussão

4.2. Organização do ambiente de aprendizagem

O ambiente de aprendizagem em sala de aula é marcado pelas tarefas propostas, pelo tipo de comunicação que se estabelece e pelas relações professor/aluno. O professor tem um papel fundamental na dinamização do ambiente, uma vez que requer uma prévia organização, intencional, no sentido de promover oportunidades de aprendizagem. Por outro lado, o ambiente de aprendizagem expressa a característica local das experiências vividas por professores e alunos, dependendo dos papéis atribuídos a cada um destes actores, os materiais e sua organização e os resultados das suas acções.

Ao longo da escolaridade, desde a educação pré-escolar, os alunos deverão estar envolvidos por um ambiente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam actividades naturais e desejadas, de acordo com o nível de desenvolvimento e a maturidade dos alunos. Um dos aspectos que não pode ser ignorado é o facto de o aluno, ao entrar na escola, já ter conhecimentos informais de matemática, sendo sobre a sua própria experiência que vai desenvolvendo os novos conhecimentos, construídos sobre os que já possuía. Na verdade, o aluno dá significado às coisas a partir daquilo que sabe, de toda a sua experiência anterior, e não necessariamente a partir da lógica interna dos conteúdos ou do sentido que o professor atribui às mesmas coisas.

Nesta perspectiva importa referir que o ambiente de aprendizagem se encontra marcado pelo envolvimento dos alunos no processo, bem como pelo tipo de relação que existe entre eles e o professor e o papel assumido por este. De acordo com o NTCM (1994), o professor deve proporcionar um ambiente de aprendizagem que promova em cada aluno o desenvolvimento do seu conhecimento matemático:

- *permitindo e estruturando o tempo necessário para explorar profundamente a Matemática e para se familiarizar com ideias e problemas significativos;*
- *usando o espaço físico e os materiais de forma a facilitar a aprendizagem do aluno em Matemática;*
- *oferecendo um contexto que encoraje o desenvolvimento da aptidão e da competência matemáticas;*
- *respeitando e valorizando as ideias dos alunos, as suas formas de pensar e a sua predisposição para a Matemática* (p. 59).

Este ambiente de aprendizagem tem como objectivo encorajar os alunos a:

- *trabalhar independentemente ou em colaboração de modo a dar sentido à matemática;*
- *aceitar riscos intelectuais, colocando questões e formulando conjecturas;*
- *manifestar um sentido de competência matemática ao validar e defender ideias com argumentos matemáticos* (p. 59).

Para a consecução de um bom ambiente de aprendizagem, torna-se necessária a rentabilização de todos os recursos ao alcance do professor, sejam eles materiais manipuláveis ou todo o tipo de instrumentos da vida corrente e de uso diário na escola. O professor deve planear cuidadosamente a utilização dos recursos e testá-los previamente, procedendo posteriormente à organização dos alunos de acordo com a utilização desses mesmos recursos. Também a organização do modo de trabalho dos alunos é de extrema importância. O professor, de acordo com a intencionalidade da sua acção educativa, com a tarefa a realizar e com a sua estratégia de ensino, poderá organizar os alunos de diversas maneiras: em colectivo, em grupo, em pequeno grupo, a pares ou individualmente.

Actividade 4.2. A

Caracterize o ambiente de aprendizagem da sua sala de aula e verifique se se encontra organizado de acordo com as recomendações do NTCM. Identifique os principais constrangimentos existentes e, em colectivo, reflicta sobre a forma de os ultrapassar.

4.3. Papel do professor na gestão curricular e na condução da aula

O currículo deve contemplar objectivos (gerais e específicos), orientações metodológicas, conteúdos e avaliação (APM, 1988). A gestão do currículo está relacionada com o modo como o professor ou o conjunto de professores numa escola interpreta e desenvolve as orientações curriculares e as adequa ao contexto social e cultural em que está inserido, aos recursos que tem disponíveis e aos seus alunos. Assim sendo, o currículo deve ser visto como um documento orientador flexível que permite a concretização de algumas situações de ensino-aprendizagem tendo em conta as características de uma região e dos alunos, bem como os conhecimentos que os alunos já possuem.

A gestão curricular requer um planeamento com o objectivo de orientar a prática do professor e regular a aprendizagem do aluno. Assim, o professor tem de dar resposta relativamente ao ensino: “O quê?”, “Porquê?”, “Quando?” e “Como?” (Adaptado de Abrantes, 1985). O modo de trabalho em sala de aula, que requer uma grande participação dos alunos na realização das tarefas e na discussão dos conceitos, coloca o professor num papel de destaque no processo de aprendizagem, o que se reflecte na preparação das suas aulas, devendo ter em conta que:

> *(i) "a aprendizagem é um processo de construção do conhecimento e não uma mera retenção e absorção do mesmo";*
>
> *(ii) "a aprendizagem depende do conhecimento prévio do aluno, dado que este o utiliza na construção do novo conhecimento";*
>
> *(iii) "o aluno está consciente dos seus processos cognitivos, assim como do desenvolvimento das capacidades de controlo e regulação desses processos, influindo de forma significativa na aprendizagem"*
>
> (Anthony, 1996, referido por Cruz & Martinón, 1998, p. 2).

Ao professor não cabe o mero papel de transmissor de conteúdos, sendo fundamental encontrar-se munido de tarefas e materiais que o possam auxiliar durante o processo de ensino-aprendizagem. Estas tarefas podem envolver contextos matemáticos e contextos do dia-a-dia. Para o aluno é importante a exploração das coisas do mundo que o rodeia, de modo a dar mais sentido a factos e ideias matemáticos. As interacções na sala de aula são também de grande importância, tendo o professor um papel essencial na sua promoção, pois precisa de valorizar as interacções entre os alunos e entre estes e o professor durante a condução da aula.

Actividade 4.3. A

1. Da sua prática, seleccione uma aula e registe-a por escrito, indicando todos os passos na planificados e concretizados, no sentido de validar a seguinte afirmação:
"No processo de aprendizagem, o aluno assume um papel fundamental na produção e na validação do conhecimento adquirido, enquanto que o professor assume um papel de orientador e regulador da comunicação".

2. Caso verifique que não consegue validar a afirmação, reformule a planificação dessa mesma aula.

4.4. Planificação de situações de ensino-aprendizagem em Matemática

As situações de ensino-aprendizagem em Matemática contemplam vários momentos de planificação: anual, de uma unidade, de uma aula.

A definição do que ensinar, porque ensinar e quando ensinar deve ter por base um trabalho colaborativo dos professores na organização da aprendizagem dos alunos. É por isso essencial identificar a intencionalidade do ensino de modo a definir a estratégia de ensino que orienta a sua prática lectiva.

O professor é o elemento-chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula. Cabe-lhe, por isso, a responsabilidade de propor e organizar as tarefas a realizar e de coordenar o desenvolvimento da actividade dos alunos. Para definir como ensinar, o professor deve delinear "um conjunto organizado de acções para a melhor consecução de uma determinada aprendizagem" (Roldão, 2009, p.57).

A planificação anual deve contemplar os princípios orientadores para o ensino da Matemática para a escolaridade básica, os objectivos gerais do ensino da Matemática, a sequência das unidades e os respectivos conteúdos, a duração de cada unidade e os instrumentos de avaliação a usar. A planificação de cada unidade deve considerar diferentes aspectos, identificados na Figura 7:

Os alunos devem ser capazes de… (objectivos gerais e específicos de aprendizagem)	Sequência de tarefas: – Por onde começar? – Qual o caminho a seguir? – O que fazer?	Conhecimentos e experiências anteriores	Recursos: materiais manipuláveis, textos, livros, *software*…
Conexões com outros tópicos e outras áreas	Unidade		Tempo necessário
Natureza das tarefas	Formas de trabalho em sala de aula	Capacidades a desenvolver: – Resolução de problemas; – Comunicação Matemática; – Argumentação e justificação.	Avaliação formativa e reguladora

Figura 7. Componente da planificação de uma unidade (Adaptado de Hernandéz, 2000)

Cada professor deve também desenvolver o seu plano de aula, definindo os objectivos específicos de aprendizagem para essa aula, tendo em conta os conhecimentos prévios dos alunos, as estratégias de ensino, os recursos a usar, os instrumentos de avaliação e o que avaliar. É ainda de extrema importância que o professor defina na planificação da sua aula o modo como os alunos vão trabalhar ao longo da mesma.

Na preparação de uma aula é fundamental a escolha da tarefa, que pode ser do manual ou de outra fonte, a propor aos alunos com vista ao desenvolvimento do seu conhecimento matemático e das suas capacidades. Relativamente a essa tarefa, o professor deve antecipar a actividade dos alunos, sendo importante que consiga prever as estratégias de resolução que estes vão usar e as possíveis dificuldades, e antecipar acções que ajudem os alunos a ultrapassá-las. Por exemplo, o professor pode pensar previamente em questões a colocar aos seus alunos perante uma determinada dificuldade.

Nesta secção importa ainda clarificar a relação entre tarefa e actividade que, na didáctica da matemática, têm lugar de relevo. Assim, tarefa matemática é a situação proposta pelo professor, no sentido de os alunos desenvolverem a sua actividade matemática, a qual constitui a base da sua aprendizagem. Nesta perspectiva, ao realizar a selecção, a adaptação e/ou a criação de tarefas (problemas, investigações, exercícios, construções, jogos, exposições orais, relatos escritos…) o professor tem de ter em conta o conteúdo a abordar, os alunos e o modo como estes aprendem.

No que se refere ao conteúdo matemático a abordar, o professor deverá analisar se as tarefas a propor representam adequadamente os conceitos e processos subjacentes, se são pertinentes em termos curriculares e se proporcionam o desenvolvimento de aptidões. Relativamente aos alunos, o professor deve ter presente os saberes, aptidões e experiências prévios do aluno, no sentido de propor tarefas que lhes permitam aprendizagens mais significativas, através da mobilização desses saberes e experiências. No que respeita ao modo como os alunos aprendem, o professor deverá procurar tarefas nas quais os alunos possam comunicar as suas aprendizagens, o que lhe permite conhecer as ideias que estes desenvolvem e, consequentemente, a forma como aprendem.

Na secção dos anexos deste documento encontra-se uma proposta-modelo de planificação que poderá ser utilizada como orientação. Nos anexos 4 e 5 são apresentados exemplos de estruturas de planificação de uma unidade didáctica e de uma aula.

Actividade 4.4. A

1. Seleccione uma planificação de um conteúdo leccionado e analise-a de forma a verificar se respeita as componentes indicadas na Figura 7. Deverá ainda verificar se essa planificação respeita o ritmo de aprendizagem dos alunos, conforme o nível em que se encontram.

2. Caso verifique que essa planificação não respeita o referido no ponto 1., proceda à sua reformulação, à luz do referido no presente ponto.

4.5. O desenvolvimento profissional do professor

O professor deve ser, acima de tudo, um facilitador da aprendizagem, alguém que cria as melhores condições para os alunos aprenderem (Abrantes, Oliveira & Serrazina, 1999). Para tal, o professor tem de se questionar constantemente, enquanto profissional capaz de reflectir sobre as suas práticas, de as questionar criticamente e de, consequentemente, as mudar. Nesta perspectiva, a actividade do professor não está circunscrita unicamente à prática pedagógica visível, ou seja, a prática não se reduz às suas acções em sala de aula ou à planificação que constrói para essas mesmas acções, não se limitando ao domínio metodológico e ao espaço da sala de aula.

A reflexibilidade de um professor manifesta-se na inteligência prática no trabalho, na capacidade de desempenhar em situação real, na construção através do saber-fazer. Revela-se ainda através do êxito da acção, reportando-se às capacidades e aos saberes tácitos do professor, na medida em que o contexto da acção pode não corresponder aos padrões de referência teóricos e não pode ser transmitido, ou seja, apenas pode ser treinado. No centro destes processos a reflexão que os professores fazem sobre as suas próprias práticas colocam-nos perante situações problemáticas que eles têm de resolver, o que implica decisões de grande complexidade, incerteza e singularidade que têm de tomar para a solução desses problemas (Schön, 1983). Ao reflectir sobre a acção, o professor consciencializa o conhecimento tácito e reformula o pensamento, uma vez que se trata de olhar retrospectivamente para o que aconteceu, o que observou, que significado atribui e que outros significados pode atribuir ao que aconteceu. É a reflexão orientada para a acção futura que ajuda a compreender novos problemas, a descobrir soluções e a orientar acções futuras.

Tornam-se, por isso, essenciais a valorização e a prática do trabalho em equipa, o estabelecimento de parcerias de aprendizagem com a comunidade, o desenvolvimento e a utilização de uma inteligência colectiva, bem como o cultivo de uma profissão que valorize a resolução de problemas, a confiança profissional e o empenhamento num aperfeiçoamento contínuo. O conhecimento profissional dos professores, como entidade colectiva, tem de construir-se no diálogo e no trabalho em função de um objectivo comum, assumindo-se o professor como parte integrante e activa de um todo colectivo. Assim, a partir das identidades individuais, constrói-se uma identidade colectiva.

A formação dos professores deve centrar-se nos contextos da sua prática e em colaboração, uma vez que é aos docentes que compete investigar os seus próprios métodos. Através da submissão das suas acções a um olhar crítico e grupal, existe uma contribuição para melhorar o exercício da sua profissão, para compreender as suas práticas de ensino e as situações em que operam. Assim, os professores reflectem sobre os sucessos e as dificuldades, adaptando e melhorando as práticas de intervenção, numa perspectiva socioconstrutivista de aprendizagem e de investigação-acção enquanto modalidade de formação.

Nesta perspectiva, torna-se fundamental a reflexão partilhada nas sessões mais alargadas da planificação, assim como entre os professores de uma escola, que se podem constituir como grupos de suporte mais imediato, numa perspectiva de desenvolvimento profissional.

Actividade 4.5. A

Reflicta sobre a sua prática e seleccione um conteúdo em cuja leccionação tenha tido dificuldades. Elabore uma reflexão crítica, indicando os aspectos positivos e negativos. Coloque a sua reflexão para análise do grupo de colegas e discutam de que forma poderão ajudar a ultrapassar essas dificuldades à luz da formação através da reflexão partilhada.

5. Ensinar e aprender Matemática

5.1. Números e operações

Sentido de número. Segundo Castro e Rodrigues (2008), o sentido de número:

> [...] *diz respeito à compreensão global e flexível dos números e das operações, com o intuito de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis e eficazes para cada um os utilizar no seu dia-a-dia, na sua vida profissional ou enquanto cidadão activo. É, pois, uma construção de relações entre números e operações, de reconhecimentos numéricos e modelos construídos com números ao longo da vida e não apenas na escola. Inclui ainda a capacidade de compreender o facto de que os números podem ter diferentes significados e podem ser usados em contextos muito diversificados.* (p. 63)

Se tivermos em conta as orientações do NCTM (2007) uma criança possui o sentido de número quando:

1. Compreende o significado dos números, o que inclui, além de outros, o carácter cardinal, o carácter ordinal de número e o aspecto nominal;
2. Desenvolve múltiplas relações entre números;
3. Reconhece a grandeza relativa dos números;
4. Conhece o efeito relativo de operar com os números e as relações entre as operações;
5. Desenvolve padrões de medida de objectos e consegue criticar quanto à sua razoabilidade.

O primeiro ponto apresentado pelas normas refere explicitamente a compreensão dos vários significados do número. Quando falamos, por exemplo, no número de elementos de um conjunto, como no exemplo da Figura 8, surge a noção cardinal do número.

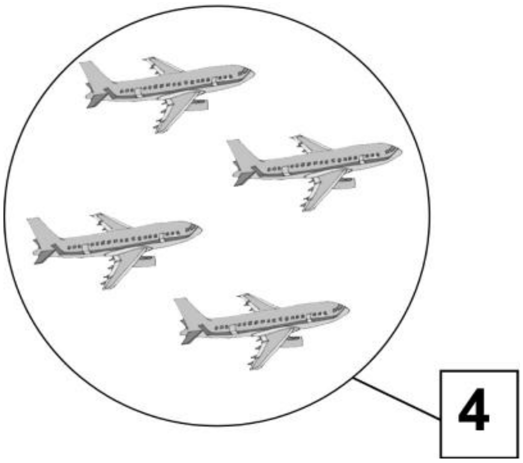


Figura 8. Número de elementos de um conjunto. (Adaptado do manual da 1.ª classe)

Se em vez disso estiver implícita uma ordenação de elementos como se exemplifica na Figura 9, então nesse caso é o aspecto ordinal do número que se pretende trabalhar.

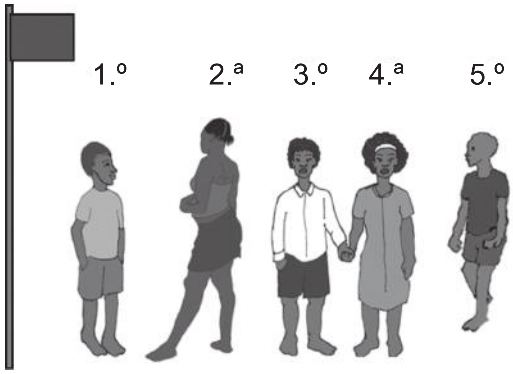


Figura 9. Números ordinais. (Adaptado do manual da 1.ª classe)

No entanto, não podemos esquecer que, na sociedade actual, o número existe para além destas duas dimensões: ordinal e cardinal. No artigo de Turkel e Newman (1993) é dada especial relevância às inúmeras formas como os números são utilizados sem envolverem necessariamente o cálculo. Por exemplo, como localização (número das portas), como identificação (número do passaporte ou de aluno, número de telefone), como medida, entre outras.

Um dos aspectos fundamentais para o desenvolvimento do sentido de número, são as relações que se podem estabelecer entre os números. Aliás, a partir delas torna-se mais fácil para as crianças a compreensão dos algoritmos das várias operações das suas propriedades, a realização do cálculo mental e mesmo a relação entre as diferentes representações do mesmo número.

Van de Walle (2003) refere que se deve começar por abordar as relações de mais, menos e igual, passando depois para o processo de contagem, e que inicialmente a criança deve fazê-lo com recurso a materiais manipuláveis (caricas, paus, pedrinhas, sementes, etc.) para depois contar objectos que não sejam "manipuláveis"; por exemplo: "quantas árvores consegues ver da janela da escola?"; ou "contar a partir de...". No exemplo que vamos explorar de seguida pretende-se desenvolver nas crianças relações entre os números a partir de arranjos de pontos padronizados (Figura 10).

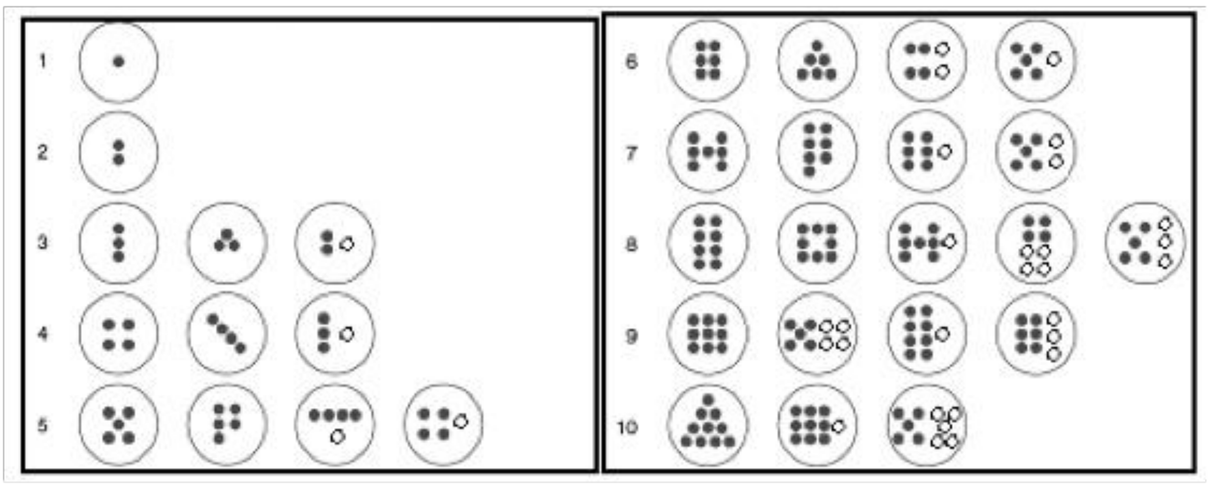


Figura 10. Exemplo de cartões de pontos até 10 (Adaptado de Castro e Rodrigues, 2008)

Van de Walle (2003) nomeia três tipos de relações fundamentais, entre duas ou mais partes que constituem um número natural: (i) "mais do que um e menos do que um"; (ii) "mais do que dois e menos do que dois"; (iii) e a relação com "números especiais" como o número 5 e o número 10.

Por exemplo, se olharmos para a linha dos números 6, 7, 8 e 9 na Figura 10 verificamos que a forma como os pontos estão dispostos e a presença de duas cores permitem que a criança identifique várias relações entre os números em causa e outros números. Por exemplo, na linha do 7 podemos identificar a relação "sete é igual a seis mais um" e a relação "sete é igual a cinco mais dois".

Existem outros recursos, materiais didácticos e jogos, que não serão explorados detalhadamente aqui, mas que permitem de qualquer modo promover nas crianças o estabelecimento de relações numéricas, por exemplo: as molduras de dez (Anexo 6), o colar de contas, as faixas de duas colunas, cartões de pontos, as barras de cuisenaire, o jogo “Perto de 100” (Anexo 7), entre outros, sendo muito fácil a sua construção pelos próprios formandos.

Sistema de numeração decimal e posicional. O nosso sistema de numeração utiliza algarismos (dez) indo-árabes que sofreram uma evolução até aos dias de hoje. Do ponto de vista do ensino-aprendizagem, não é um sistema fácil de aprender pois o mesmo algarismo pode representar quantidades diferentes, dependendo da posição que ocupa. De acordo com Pires (1994, citado por Ponte e Serrazina, 2000), os alunos, para compreenderem o nosso sistema de numeração, têm de compreender que um grupo de dez numa dada posição pode ser trocado por uma unidade da posição imediatamente à esquerda.

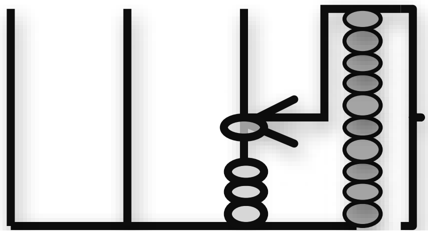


Figura 11. Ábaco vertical

Ainda de acordo com o mesmo autor, é interessante verificar que muitas crianças sabem que a seguir ao 39 vem o 40 e sabem representar esse número no ábaco (ver Figura 11), mas se perguntarmos a essas mesmas crianças quanto vale o 3 no número 39, talvez não saibam responder que o três corresponde a 30 unidades ou 3 dezenas, isto é o 39 são 3 agrupamentos de 10 unidades mais 9 unidades.

Normalmente, para ligar a representação simbólica de um número com dois ou mais algarismos ao valor de posição usam-se quadros com duas ou mais colunas, indicando as unidades, dezenas e centenas, como se pode observar na Figura 12; no entanto, os alunos podem aprender a escrever o número sem qualquer compreensão do que estão a fazer.

d	u
1	5
quinze	

Figura 12. Valor de posição

Como podemos ajudar as crianças a ultrapassar estas dificuldades? Podemos, por exemplo, utilizar um modelo linear como o fio de contas (Figura 13) utilizando contas de duas cores, divididas de 10 em 10, o que permite estabelecer uma ligação à sequência numérica e à descoberta de relações numéricas. Podem construir um fio até à centena, usando por exemplo tampas de garrafa de duas cores ou de dois tipos (50 de cada para fazer grupos de 10 unidades alternados).

Figura 13. Colar de contas

Outro modelo linear é a recta numérica que pode ser apresentada “graduada”, “semi-graduada” ou “vazia” (Anexo 8).

As crianças devem perceber que, para fazerem contagens de grandes quantidades, é mais fácil fazer agrupamentos de 10 elementos e depois contar esses agrupamentos e as unidades que sobrarem. Não se deve impor às crianças que façam essa contagem em grupos de 10, mas sim criar essa necessidade. O jogo do banqueiro (Anexo 9) permite desenvolver esta noção de agrupamento (Figura 14).

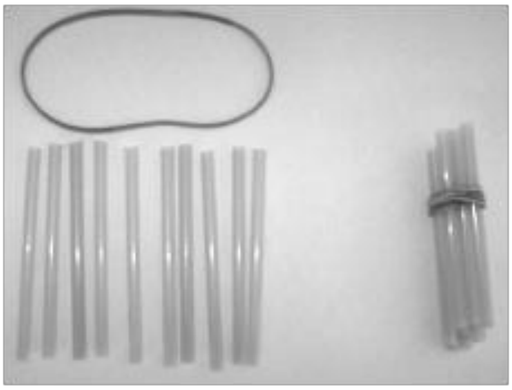


Figura 14. Ilustração de agrupamentos com palhinhas no jogo do banqueiro.
(retirado de http://cresceraaprender.blogspot.pt/2009/02/jogo-do-banqueiro.html)

Por exemplo, muitas das dificuldades dos alunos residem exactamente na compreensão do sistema posicional. Na Figura 15 o aluno tem dificuldade em compreender o valor de dezena, centena e milhar e além disso está também presente a dificuldade de compreensão dos números decimais.

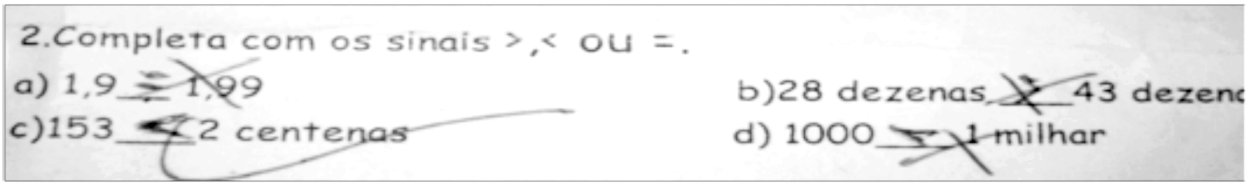


Figura 15. Produção de um aluno – ficha de trabalho

Cálculo mental. Huinker (2002), referindo-se a Howden e Sowder, defende sete dimensões importantes para o desenvolvimento do sentido de operação, sendo aplicáveis tanto aos números inteiros como às fracções e decimais. A primeira dimensão prende-se com a compreensão do significado de operação. A segunda dimensão é a capacidade para reconhecer e descrever situações da vida real para as várias operações. Por exemplo, segundo Treffers e Buys (2001), adicionar e subtrair devem incluir situações de juntar, acrescentar, retirar e diferença. Multiplicar e dividir deve envolver situações em que os alunos possam lidar com grupos equivalentes (adição repetida de parcelas), com a disposição rectangular, com razões, comparações e produtos cartesianos.

Vejamos dois exemplos ilustrativos do que foi referido no parágrafo anterior. Como exemplo do sentido da multiplicação da disposição rectangular podem ser trabalhados problemas: quantos lugares sentados tem uma sala com forma rectangular, sabendo que o lado maior leva 10 cadeiras e o menor 7?

O cálculo mental tem de ser desenvolvido desde o início e está intimamente relacionado com o desenvolvimento do sentido de número. Caracteriza-se por: (i) trabalhar com números e não com algarismos; (ii) usar as propriedades das operações e as relações entre números; (iii) implicar um bom desenvolvimento do sentido de número e um saudável conhecimento dos factos numéricos elementares; e (iv) permitir o uso de registos intermédios de acordo com a situação (ME, 2007). De acordo com Buy (2001, referido por Brocardo e Serrazina, 2008) podemos classificá-lo em três categorias: (i) Cálculo em linha, em que os números são vistos como se estivessem colocados na recta numérica e as operações são movimentos ao longo da recta; (ii) Cálculo recorrendo à decomposição decimal, em que se opera a partir das decomposições decimais dos números; (iii) Cálculo mental usando estratégias variadas, em que os números são objectos que podem ser estruturados de diferentes formas e as operações podem ser efectuadas a partir da escolha de uma estrutura e de propriedades aritméticas adequadas. No entanto, nunca devemos esquecer que cada criança tem a sua estratégia própria e por isso deve ser incentivada pelo professor a usá-la e a explicá-la aos seus colegas.

Vejamos o seguinte exemplo da Figura 16, que apresenta três estratégias diferentes para calcular 38 + 25 recorrendo à recta vazia. Tal como mencionamos, o colar de contas é um dos recursos mais utilizados para introduzir o modelo da recta vazia às crianças. Se repararmos na Figura 16, a criança começa por identificar o primeiro elemento da parcela no colar de contas, 38, e depois realiza dois saltos de 10, pois sabe que 25, corresponde a duas dezenas e cinco unidades. Dados os dois saltos de 10 pára no número 58; e agora tem várias opções. Neste caso a criança sabia que 5 = 2 + 3 e que ao adicionar 2 a 58 obtém 60. Por fim resta adicionar 3, obtendo 63 como o resultado desta adição. Nas estratégias seguintes as crianças já não sentiram necessidade de recorrer ao colar de contas, utilizando apenas o modelo da recta vazia. No segundo exemplo a criança marcou a primeira parcela, o número 38, e realizou logo um salto de 20 unidades, ficando no 58; depois não teve necessidade de decompor o número 5 e realizou logo um salto de 5 unidades, obtendo o 63. No terceiro e último caso, a criança optou por adicionar 2 unidades ao 38 de modo a obter um múltiplo de 10, o 40; deu depois um salto de 20 unidades, ficando no 60, e por fim adicionou as 3 unidades que faltavam.

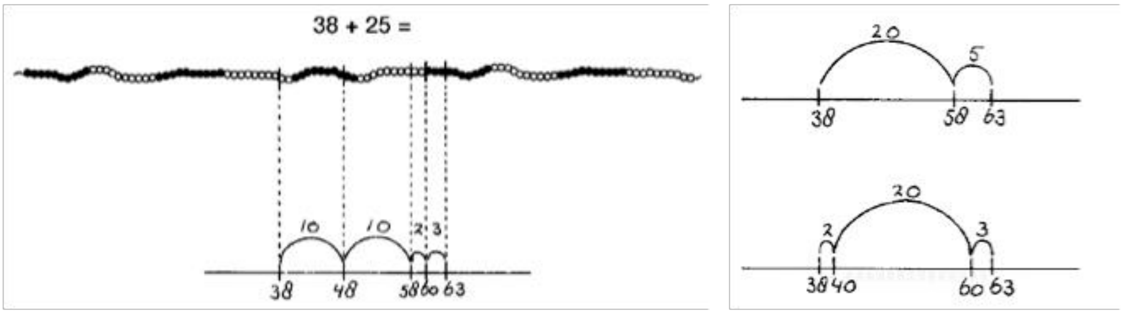


Figura 16 - Exemplo retirado de Klein e Beishuizen (1998).

A tabela da centena (Anexo 10) é um outro instrumento que pode ser utilizado pelos alunos para apoiar as suas estratégias de cálculo.

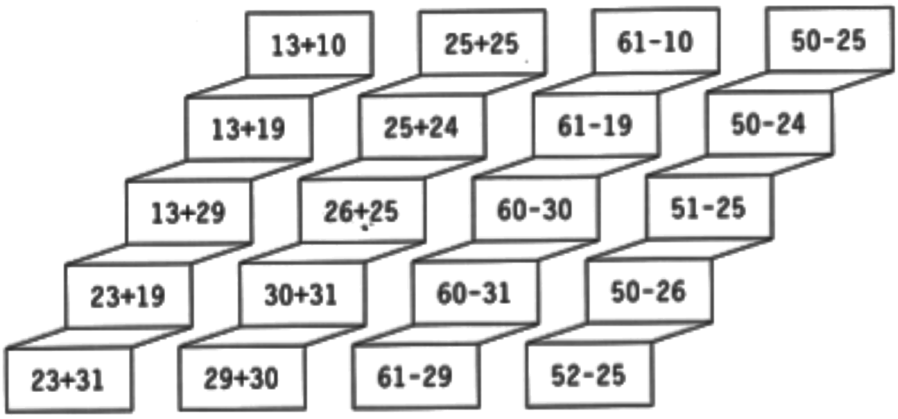


Figura 17. Calculando em cadeia. (Exemplo retirado da equipa do Projecto Desenvolvendo o Sentido de Número, 2005)

De acordo com os autores do Projecto Desenvolvendo o Sentido de Número, cada cadeia apresentada na Figura 17 procura construir nas crianças relações entre os números que estão directamente relacionadas com a linha anterior da cadeia. Por exemplo, a primeira cadeia foi concebida de modo a que criança utilize saltos de 10 ou quase 10, compensando depois. Senão vejamos: 13 + 10 = 23; com base neste resultado, a criança vai calcular a operação na linha abaixo fazendo 13 + 20 - 1 = 32, isto é, dá um salto de 10 e compensa retirando 1. Cada cadeia tem um objectivo específico e deve ser dada aos alunos uma de cada vez.

Sentido de operação. O estudo das operações segundo Pires (2004), citado por Ponte & Serrazina (2000), processa-se ao nível dos primeiros anos em três etapas: (i) Compreensão do sentido de operação (manipulação de materiais, modelo iconográfico, chegando depois à representação simbólica); (ii) Desenvolvimento do sentido operatório, do cálculo mental e aprendizagem das propriedades das operações; e, por último, (iii) Construção do algoritmo.

A adição e a subtracção. A aprendizagem das operações exige que o professor tenha em conta as três etapas enunciadas no parágrafo anterior. Além disso, é importante dar a conhecer aos professores diversos contextos de situações problemáticas a propor aos seus alunos em que a adição e a subtracção podem surgir. Por exemplo na adição, segundo Treffers e Buys (2001) citado por Brocardo, Serrazina e Rocha (2008), a adição pode surgir em tarefas de juntar e acrescentar e a subtracção em tarefas de retirar e diferença; e ainda devem ser contempladas tarefas de comparar e igualar.

Vejamos alguns exemplos: 1) No recreio estão 15 rapazes e 17 raparigas. Entretanto, chegam 5 rapazes e 10 raparigas. Quantos rapazes e quantas raparigas ficam ao todo no recreio? 2) Eu tenho 6 caricas e o meu irmão tem 2. Quantas caricas tenho eu a mais que o meu irmão? 3) A Olinda precisa de 7 selos para as cartas que escreveu à família, que reside em Angola. Sabendo que a mãe lhe comprou uma folha de selos com 12, quantos sobram? (retirado do manual da 2.ª classe).

A multiplicação e a divisão. De acordo com Carvalho e Gonçalves (2003), para que uma criança compreenda o raciocínio multiplicativo, terá de existir uma transformação no pensamento das crianças, apesar de a multiplicação e a divisão serem consideradas simples do ponto de vista da matemática. Estas operações apresentam uma complexidade grande a nível cognitivo quando encaradas do ponto de vista da modelação. Para isso é necessário que os professores proponham um conjunto variado de situações que conduzam à formalização destas duas operações, ao contrário do que é habitualmente feito nas escolas, que passa pela repetição de um conjunto de exercícios com o objectivo único de treinar o algoritmo. Neste guião pretende-se dar a conhecer um conjunto variado de situações com estruturas diferentes e onde a multiplicação e a divisão surjam.

Na multiplicação deve-se trabalhar diversos tipos de problemas, desde problemas de adição repetida de parcelas iguais, também designados por “grupos equivalentes”, que são sem dúvida os mais trabalhados pelos professores, e depois problemas de disposição rectangular, problemas de produto cartesiano/combinatória e problemas de razão.

No caso da divisão, é importante trabalhar com os professores os dois significados da divisão (como partilha e como medida) e problemas que envolvam esses mesmos significados. Por exemplo, no caso em que temos “Cada criança come duas bananas, quantas crianças comerão 14 bananas?”, a situação corresponde ao caso da divisão como medida em que se procura separar um conjunto inicial em subconjuntos com um número de elementos definido à partida, ver Figura 18.

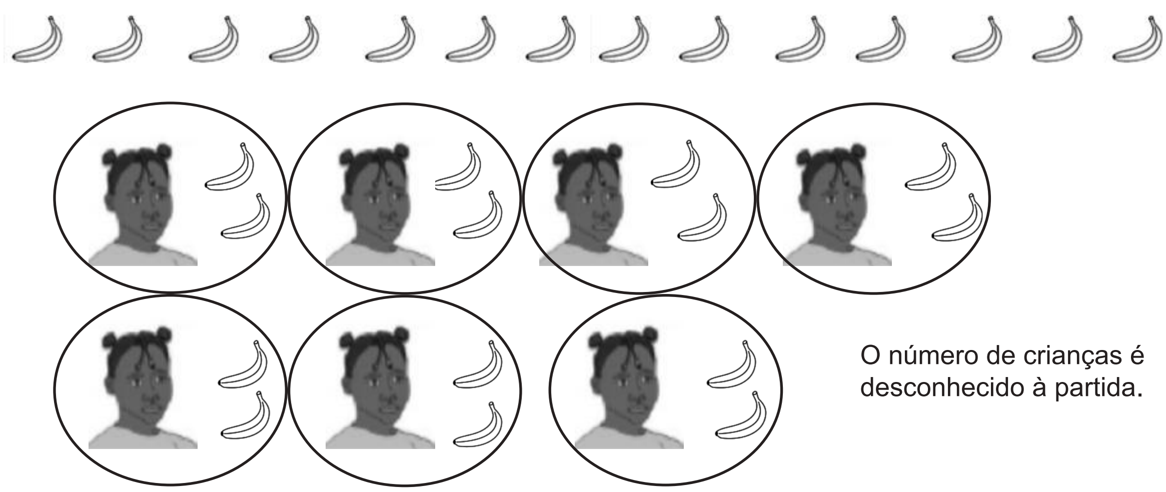


Figura 18. Ilustração da divisão como medida

Se alterarmos a situação para “Num grupo de 7 crianças comeu-se 14 bananas. Sabendo que todas comeram o mesmo, quantas bananas comeu cada uma?”, já teremos uma situação de divisão como partilha. Procura-se separar um conjunto num número conhecido de subconjuntos e o objectivo é saber quantos elementos há em cada um (Figura 19).

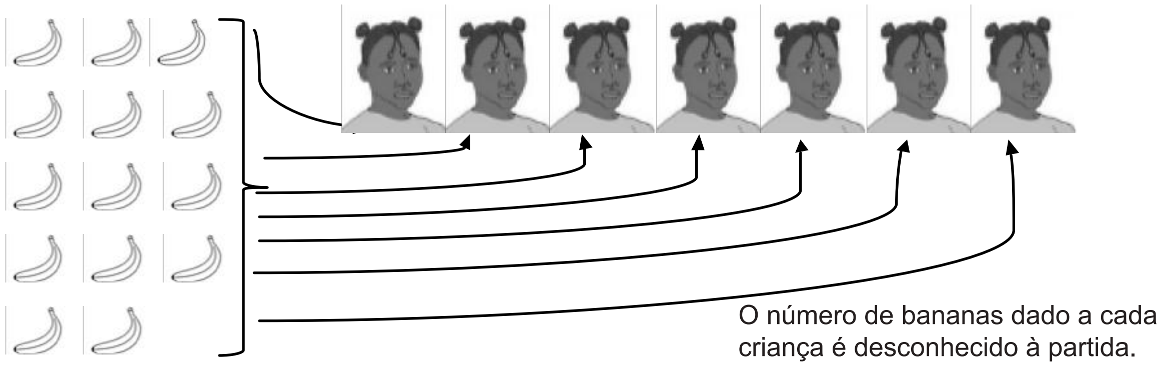


Figura 19. Ilustração da divisão como partilha

As crianças deverão também trabalhar com problemas em que o objectivo não é realizar a divisão exacta, pois o resto pode ser um resultado crucial para conseguir responder ao problema. Vejamos dois exemplos: Exemplo 1: Problema onde o resto é importante: Pretende-se organizar uma sala de aula para fazer um trabalho em grupo. Sabendo que a turma tem 30 alunos e que cada grupo terá de ficar com 7 alunos sentados ao redor de uma mesa, quantas mesas são necessárias? Exemplo 2: Problema onde o resto não é importante para a solução: Pretende-se fazer grupos de 10 com 48 pauzinhos; quantas dezenas se podem fazer?

Os racionais e as diferentes concepções do racional. De acordo com Monteiro e Costa (1996), as dificuldades dos alunos em trabalhar com números racionais têm sido objecto de várias investigações, tendo sido identificados alguns factores que poderão justificar essas dificuldades; por exemplo:

- a multiplicidade de significados dos racionais (parte-todo, medida, parte-parte ou razão, quociente e operador;
- a concepção da unidade (unidades de referência diferentes, contextos discretos e contínuos);
- ensino precoce e descontextualizado de regras e algoritmos.

Por exemplo, se analisarmos a Figura 20, verificamos que a mesma fracção 3/4 apresenta diferentes significados de acordo com o contexto da situação.

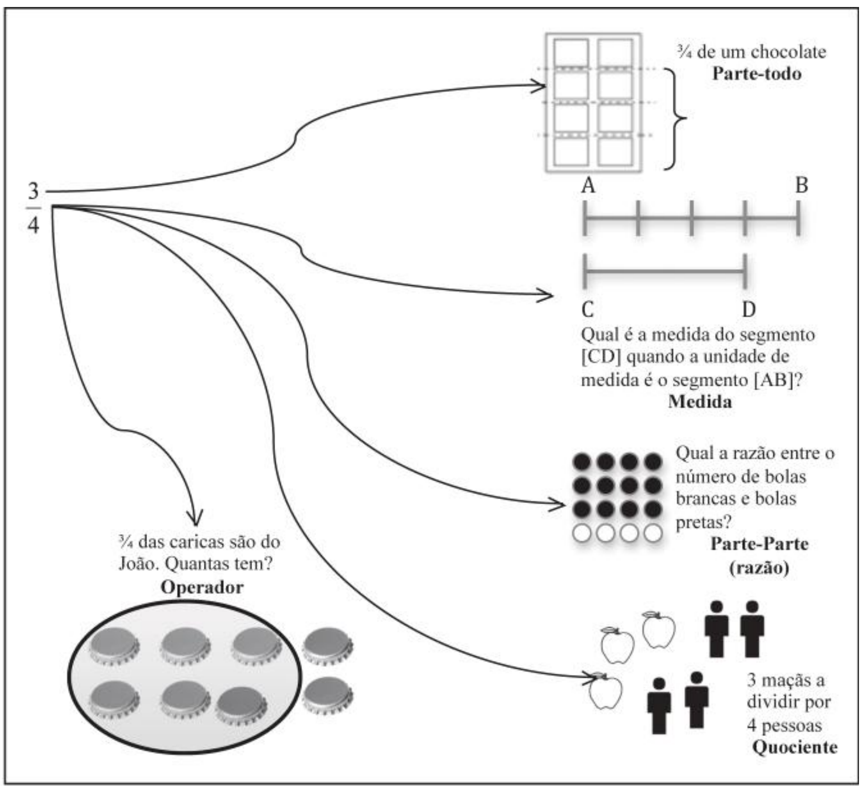


Figura 20. Exemplos de diferentes contextos da fracção ¾.

A representação dos racionais sob a forma de numeral decimal levanta também algumas dificuldades nos seus ensino e aprendizagem. Por exemplo, a concepção errada de que quanto mais algarismos tiver o número, maior ele será (comparação entre 2,346 e 3,2). Os investigadores insistem para que os professores façam nas suas aulas uma leitura correcta de um numeral decimal. Por exemplo, em vez de ler o numeral 1,5 como *um vírgula cinco,* ler antes *quinze décimas*. Vejamos o exemplo da Figura 21, onde o numeral 15,039 foi lido correctamente pelo aluno como *quinze mil e trinta e nove milésimas.*

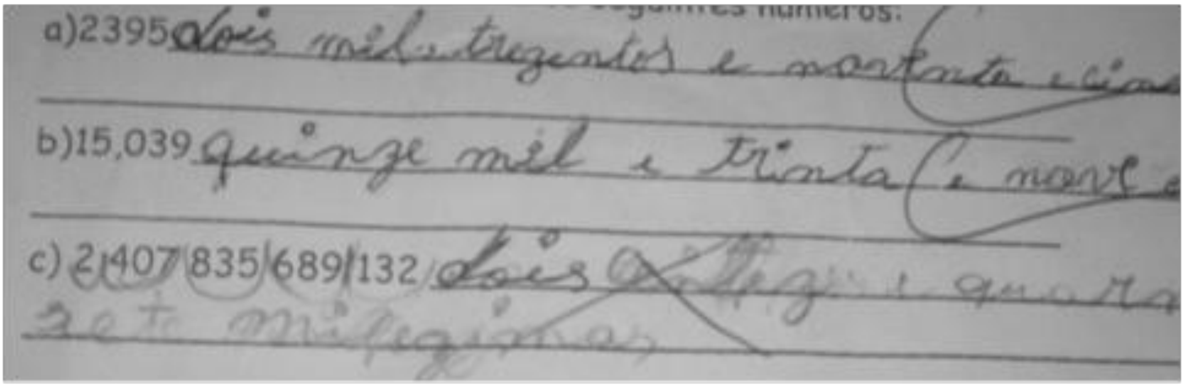


Figura 21. Exercício de leitura fonética

Outra dificuldade associada aos racionais está relacionada com a própria densidade destes. É por vezes frequente uma criança pensar que entre 0,1 e 0,2 não existem números. Relativamente às operações com os racionais, nomeadamente com fracções, as dificuldades são múltiplas. Por exemplo, muitos alunos não percebem porque na multiplicação de fracções podem multiplicar os numeradores e os denominadores, respectivamente, e não podem fazer o mesmo em relação à adição e à subtracção de fracções. Os modelos de área são um bom recurso para trabalhar estes conceitos com os alunos, de modo a que não memorizem simplesmente as regras sem qualquer compreensão.

Em suma, o professor deverá trabalhar tarefas com sentido, utilizando em paralelo as representações fraccionária e decimal dos números racionais. Deve partir dos métodos informais dos alunos e recorrer a diversos materiais, como tiras de papel, barras de *cuisenaire*, caricas, etc., evitando a ênfase excessiva nas regras e nos algoritmos, baseados na memorização e na repetição de procedimentos sem sentido para o aluno. Por último, o professordeve utilizar não só contextos contínuos, como as tiras de papel, mas também contextos discretos, como uma colecção de caricas, pauzinhos, etc. para trabalhar os conceitos de unidade e de fracção.

Os inteiros relativos. O ensino e a aprendizagem dos números inteiros relativos e as operações com estes números devem ser explorados utilizando contextos reais; por exemplo, a temperatura, os frisos cronológicos, a altitude, etc. Compreender as noções de valor absoluto e de simétrico de um número são também fundamentais neste tópico matemático.

A utilização de jogos e tarefas lúdicas são um importante recurso para os professores já em serviço na exploração deste tópico matemático. Como exemplo, vejamos o seguinte jogo com dois dados (Figura 22). O dado azul representa os inteiros negativos e o dado vermelho os inteiros positivos e a pontuação obtida resulta da adição da pontuação obtida por ambos. Se o resultado da soma é positiva, então será pontuada no jogador azul; se for negativa, será pontuada no jogador vermelho.

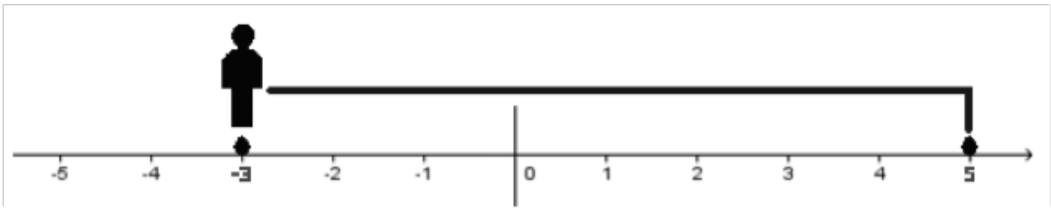
Jogador Azul (Positivo) Nome..................................	
Número sido	Pontuação obtida
+ 4	0
+ 5	+ 3
+ 4	0

Jogador Vermelho (Negativo) Nome..................................	
Número sido	Pontuação obtida
- 6	- 2
- 2	0
- 4	0

Figura 22. Ficha de registo do jogo dos dados

Por sua vez, a utilização do modelo da recta numérica é também crucial para o ensino e a aprendizagem dos inteiros relativos e operações de adição e subtracção com inteiros relativos. Vejamos o seguinte exemplo para calcular (-3) + 5.

O Rui encontra-se no ponto (-3) da recta.



Quantos passos deve dar, e em que sentido, para ir do ponto (-3) para o ponto (+5)?

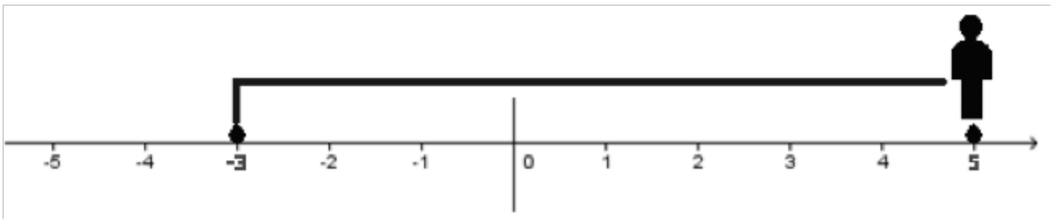


Figura 23. Utilização do modelo da recta numérica para trabalhar as operações de adição e subtracção com inteiros relativos

Como é visível na Figura 23, o modelo da recta numérica é sem dúvida um excelente recurso para o professor utilizar no ensino e na aprendizagem da adição e da subtracção de números inteiros relativos.

Actividade 5.1. A

Leia o artigo de Turkel e Newman (1993) e realize um esquema indicando, através de exemplos, os vários significados do número que surgem nesse texto ou no dia-a-dia, classificando-os em cardinal, ordinal e nominal.

Actividade 5.1. B

Identifique as relações que se podem estabelecer a partir dos vários arranjos padronizados da Figura 10 e depois construa uma tarefa recorrendo a um dos recursos apresentados anteriormente, de modo a que as crianças estabeleçam relações entre os números de 10 a 20.

Actividade 5.1. C

Analise e explique por escrito a estratégia utilizada por cada um dos alunos apresentada na Figura 16.

Actividade 5.1. D

Identifique as estratégias de cálculo que podem ser trabalhadas em cada uma das cadeias apresentadas na Figura 17. Construa agora outras cadeias de modo a trabalhar estratégias de cálculo diferentes das que já aqui foram apresentadas.

Actividade 5.1. E

Formule um problema que possa ser resolvido com a operação $2-1\frac{1}{3}$ e resolva-o com os seus alunos. Identifique as diferentes estratégias e as principais dificuldades.

5.2. Geometria

A geometria surge em todas as classes, centrando-se na exploração do espaço e das formas. O trabalho com os alunos neste domínio envolve a realização de tarefas diversificadas que promovam a visualização espacial e a compreensão das propriedades geométricas pela manipulação, a exploração e a construção.

Na formação de professores é importante que os conceitos em geometria sejam clarificados e sejam discutidas abordagens que orientem o trabalho do professor na sua prática de sala de aula. O trabalho do professor deve ser orientado pelos objectivos gerais de aprendizagem com vista ao desenvolvimento de conhecimentos e capacidades nos alunos que proporcionem uma compreensão significativa desta temática. Os vários conceitos que são apresentados de seguida são acompanhados de exemplos que devem ser analisados e discutidos com os formandos, aprofundando o seu conhecimento matemático e o seu conhecimento do trabalho a realizar com os alunos. Com base nestes exemplos podem surgir outros propostos pelo formador ou pelos formandos. O foco na visualização e no raciocínio espacial é central neste tema, promovendo um raciocínio cada vez mais formal ao longo da escolaridade. As duas secções que se seguem, de discussão de conceitos fundamentais e de sugestões de trabalho para a formação, devem surgir de modo articulado, relacionando conhecimentos e experiências.

No seu quotidiano, os alunos exploram, manipulam e constroem diversos objectos. Essa experiência deve ser continuada na escola contribuindo para o desenvolvimento do seu raciocínio espacial. Assim, o estabelecimento de relações espaciais e a análise de características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais pode surgir em experiências usando os recursos do meio que os rodeia. De modo a dar sentido à sua aprendizagem e às suas experiências do dia-dia, o ensino e a aprendizagem da geometria devem partir do espaço para o plano. Deste modo, deve iniciar-se a análise dos sólidos e a identificação de figuras do plano que neles se encontram. Esta abordagem começa por promover a análise global das figuras e em seguida a análise das características e propriedades das figuras geométricas, fomentando a progressão dos alunos de acordo com os níveis de van Hiele:

- Nível 1: Visualização – Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência;
- Nível 2: Análise – Os alunos entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades;
- Nível 3: Ordenação – Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras;
- Nível 4: Dedução – Os alunos entendem a geometria como um sistema dedutivo;
- Nível 5: Rigor – Os alunos estudam diversos sistemas axiomáticos para a geometria. (Ponte & Serrazina, 2000)

O estabelecimento de relações espaciais é também fundamental, devendo partir da análise da posição de objectos no espaço. No trabalho em geometria é importante a utilização de alguns materiais manipuláveis (modelos de sólidos geométricos, geoplanos, tangrans, espelhos, etc.) e alguns instrumentos de desenho e de medida (réguas, compassos, transferidores, etc.).

A **visualização espacial** envolve diversas capacidades que os alunos devem desenvolver através da realização de experiências concretas (Ponte & Serrazina, 2000). No Anexo 11 pode consultar-se diversos exemplos de actividades que promovem essas capacidades. O NCTM (2007) salienta que "a visualização espacial – a construção e manipulação de representações mentais de objectos bi e tridimensionais e a percepção de um objecto a partir de diferentes perspectivas – constitui um aspecto essencial do raciocínio geométrico" (p. 44).

Por exemplo, é importante que os alunos se consigam focar nas propriedades das figuras e identificar as figuras em diversas posições e no conjunto de outras figuras. Entre outras situações, pode-se solicitar aos alunos que indiquem o número de triângulos em cada uma das figuras (figuras 24, 25 e 26).

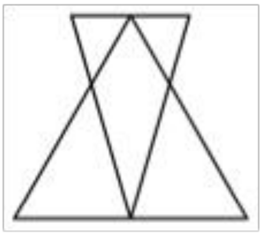


Figura 24. Triângulos 1

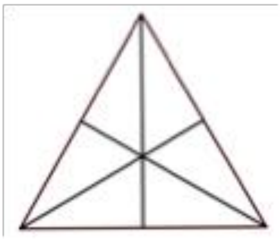


Figura 25. Triângulos 2

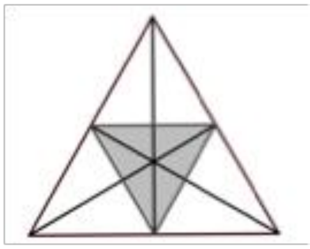


Figura 26. Triângulos 3

Devem utilizar-se figuras mais simples ou mais complexas de acordo com a classe que os alunos frequentam. A Figura 24 tem 6 triângulos, na Figura 25 é possível identificar 16 triângulos e na Figura 26 é possível identificar a existência de 47 triângulos.

Relações espaciais. Os alunos devem usar o seu próprio corpo para desenvolver o seu sentido espacial. Devem usar o sistema de referência esquerda-direita e horizontal-vertical, em situações diversificadas, tendo por base o próprio corpo. Devem analisar mapas e plantas e identificar pontos de referência. Por exemplo, os alunos podem construir uma maqueta da sala de aula com materiais que reutilizem (pequenas caixas de cartão e outros materiais disponíveis e adequados às formas dos objectos que querem representar), indicando os principais pontos de referência: a porta, as janelas, o quadro, as secretárias dos alunos, a secretária do professor, etc. Os alunos devem também analisar mapas mais simples, como por exemplo da sua rua, identificando casas de pessoas conhecidas, o comércio local ou serviços, ou mais complexos (Figura 27). Este conteúdo pode surgir em articulação com o Meio Físico e Social.

Questões que podem ser exploradas com os alunos:

- Que indicações podem ser dadas ao menino para ele se deslocar da Escola Primária Dona Maria de Jesus, onde se encontra, para se encontrar com a sua amiga na Escola Secundária Patrice Lumumba?
- Que percurso pode a menina realizar para ir até aos Bombeiros?

Figura 27. Mapa

Figuras no plano. As figuras geométricas no plano são limitadas por linhas fechadas. A figura 28 apresenta o tipo de linhas que podem existir:

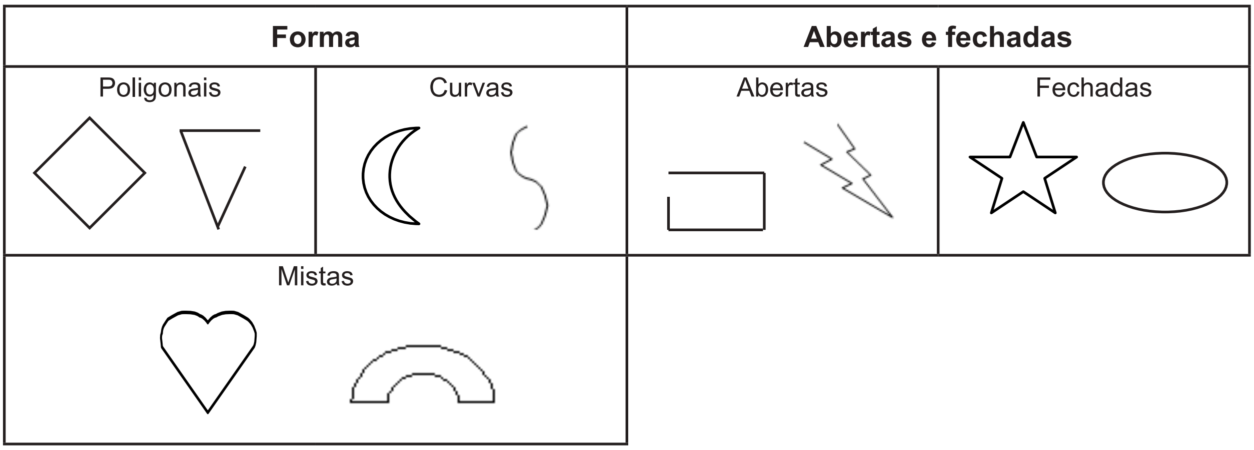


Figura 28. Linhas

Em linhas fechadas definem três regiões do plano:

- A fronteira – a própria linha;
- O interior – a região limitada pela linha fechada; e
- O exterior – a região que é exterior à linha fechada.

Os alunos na 1.ª classe podem identificar figuras do plano em sólidos geométricos e desenhá-las através do contorno dessas superfícies.

A **linha poligonal** "é formada por sucessivos segmentos de recta, tendo os segmentos consecutivos um extremo comum, não estando na mesma recta dois segmentos consecutivos e não tendo os segmentos de recta pontos comuns para além dos extremos" (Fonseca, 2004, p. 263). Por sua vez, um polígono "é a região do plano limitada que inclui a fronteira que é a uma linha poligonal fechada" (Fonseca, 2004, p. 264). Podemos ter polígonos convexos e côncavos. No polígono convexo um segmento de recta que une quaisquer dois pontos do polígono está contido no polígono. O mesmo já não acontece com o polígono côncavo (Figura 29).

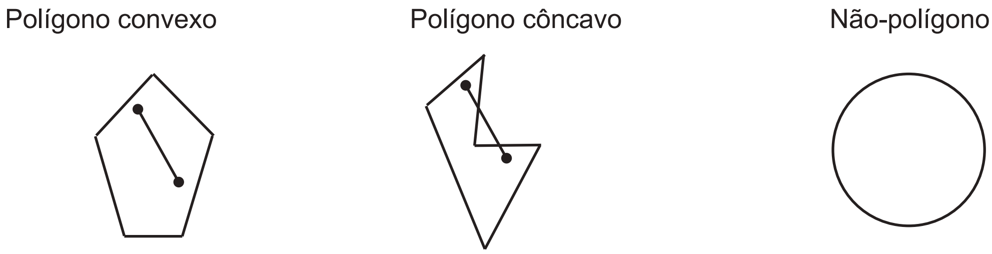


Figura 29. Polígonos e não-polígonos

Quando um polígono tem todos os lados iguais é um polígono regular. O estudo dos triângulos e dos quadriláteros assume particular importância nas primeiras classes.

É importante promover a compreensão das características e propriedades destes dois grupos de polígonos. Por exemplo, nos primeiros anos os alunos podem identificar como triângulos formas que se assemelham a triângulos mas não o são e até mesmo rejeitar como triângulos figuras que o são mas que se encontram numa posição que não lhes é familiar. O mesmo pode acontecer com quadriláteros, por exemplo, com rectângulos. Assim, o professor tem de lhes apresentar triângulos com diferentes formas e em diferentes posições, bem como formas que não são triângulos para que aprendam a reconhecer o polígono pelas suas propriedades. A Figura 30 mostra alguns exemplos de figuras que podem ser apresentadas aos alunos de modo a discutirem quais consideram ser triângulos e quais o não são.

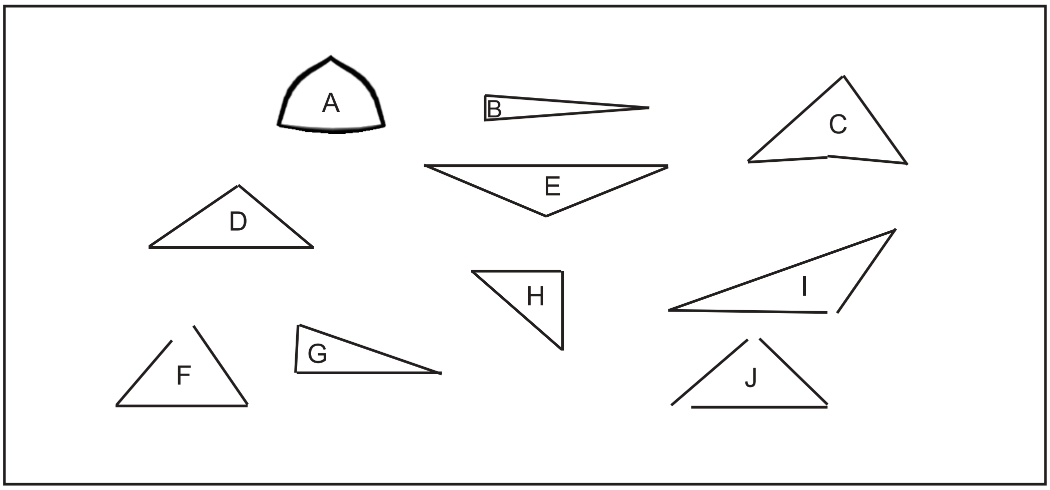


Figura 30. Triângulos e não-triângulos. (Adaptado de Clements & Sarama, 2000).

Um **triângulo** tem três lados e três vértices, bem como, **três ângulos internos**. As figuras geométricas A, C, F e J não são triângulos (Figura 30).

Há várias propriedades que vão sendo trabalhadas ao longo da escolaridade, tornando-se a sua exploração cada vez mais formal. Em articulação com o trabalho com ângulos surge o estudo mais aprofundado dos triângulos. Podemos também considerar os **ângulos externos** de um triângulo em que um lado é o lado do triângulo e o outro lado é um prolongamento de um lado consecutivo (Figura 31). Os ângulos A, B e C são ângulos internos e D é um ângulo externo.

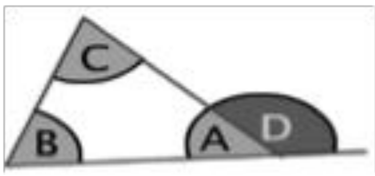
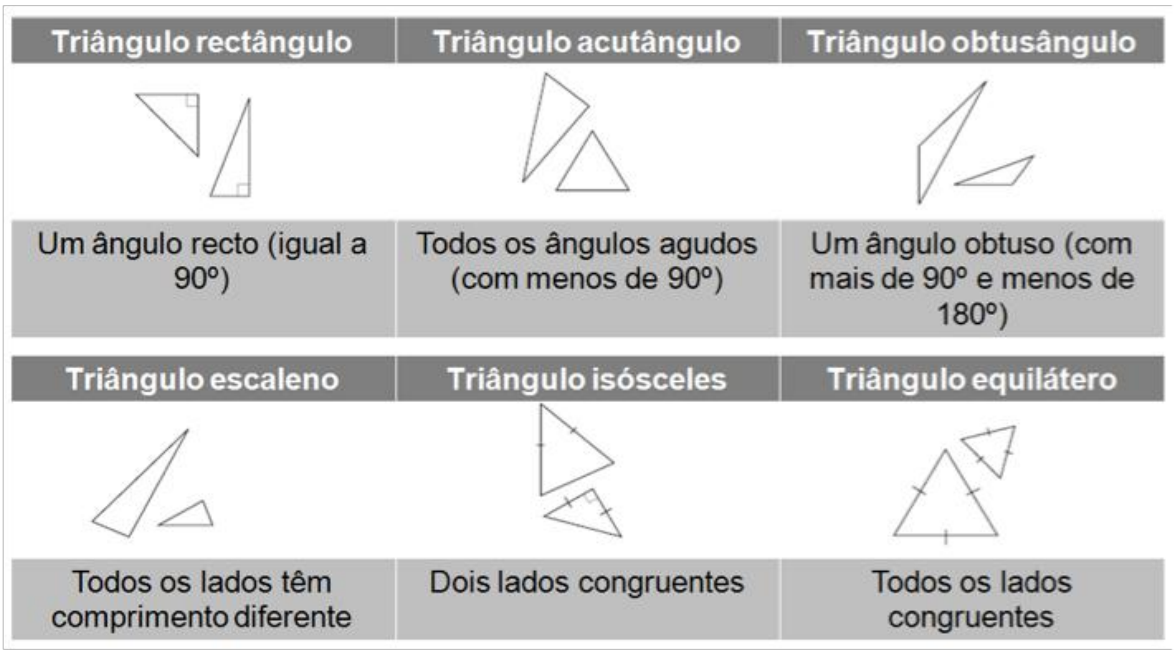


Figura 31. Ângulos num triângulo

Os triângulos podem ser classificados quanto ao comprimento dos seus lados e quanto à amplitude dos seus ângulos internos (Figura 32).



Triângulo rectângulo	Triângulo acutângulo	Triângulo obtusângulo
Um ângulo recto (igual a 90º)	Todos os ângulos agudos (com menos de 90º)	Um ângulo obtuso (com mais de 90º e menos de 180º)
Triângulo escaleno	**Triângulo isósceles**	**Triângulo equilátero**
Todos os lados têm comprimento diferente	Dois lados congruentes	Todos os lados congruentes

Figura 32. Classificação de triângulos

Os triângulos têm várias propriedades que devem ser exploradas. Ao justapor (por corte ou dobragem) os três ângulos internos de um triângulo, verificamos que a soma das suas amplitudes é igual à amplitude de um ângulo raso (Figura 33). Assim, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é de 180º.

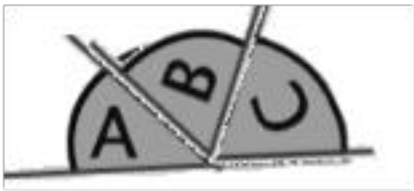


Figura 33. Soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo

O ângulo interno e o ângulo externo que lhe é adjacente são suplementares (a soma das suas amplitudes é igual a 180º). Assim, a amplitude do ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos que não lhe são adjacentes. Além disso, podemos também verificar que a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360º.

Os alunos devem construir diferentes triângulos. Além disso, devem compreender que não é possível construir triângulos com qualquer medida para os seus lados. Pode-se, por exemplo, usar paus ou palhinhas rectos de diferentes comprimentos para explorar com os alunos situações em que é possível construir um triângulo e situações em que essa construção não é possível (Figura 34), fazendo o registo numa tabela:

Comprimentos dos lados			É possível construir um triângulo?

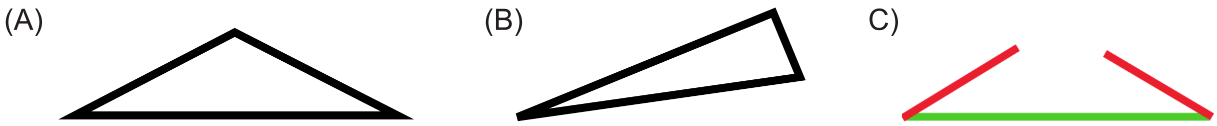


Figura 34. Possibilidade de construção de triângulos com palhinhas

As situações A e C permitem a construção de triângulos, enquanto a situação B não. Para que a construção de triângulos seja possível é necessário que a soma dos comprimentos de quaisquer dois lados do triângulo seja maior do que o comprimento do outro lado (**desigualdade triangular**). Neste caso, o comprimento das duas palhinhas vermelhas não é suficiente. A soma dos comprimentos destes dois lados do triângulo é inferior ao comprimento do lado formado pela palhinha verde.

Na **construção de triângulos** é necessário ter uma de três situações (Anexo 12):

- Dados os comprimentos dos três lados;
- Dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado;
- Dados o comprimentos de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado.

Um **quadrilátero** é um polígono com quatro lados. No anexo 13 é apresentado o esquema de classificação de quadriláteros que consta do manual da 6.ª classe, que deve ser analisado de forma crítica. Se o quadrilátero convexo tem pelo menos um par de lados paralelos, designa-se por trapézio. Dentro deste grupo, se o quadrilátero tem os quatro lados paralelos dois a dois, designa-se por paralelogramo. Dentro dos paralelogramos, os polígonos podem ainda ser classificados quando aos ângulos e quanto aos lados. Se um polígono tem os quatro ângulos rectos é um rectângulo. Se tem os lados geometricamente iguais é um losango. O quadrado tem os quatro ângulos rectos e os quatro lados geometricamente iguais, sendo por isso simultaneamente losango e rectângulo.

O círculo não é um polígono. É importante que os alunos distingam círculo de circunferência. A **circunferência** é o conjunto de pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto que se chama centro da circunferência. Por sua vez, o **círculo** é a região do plano que é limitada pela circunferência e a inclui. À distância entre cada ponto da circunferência e o centro designa-se por raio. A um segmento de recta que una quaisquer dois pontos da circunferência chamamos corda. As cordas que passam pelo centro da circunferência são os diâmetros. A Figura 35 identifica estes diversos elementos. O comprimento do diâmetro é o dobro do comprimento do raio.

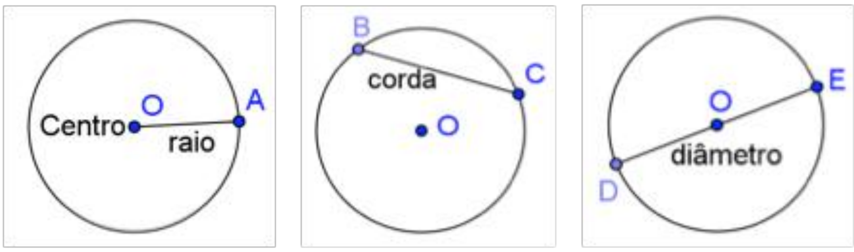


Figura 35. Elementos da circunferência.

Sólidos geométricos. Os alunos começam por reconhecer as formas geométricas pelo seu aspecto global (NCTM, 2007). Progressivamente, o professor deve promover a compreensão das suas propriedades. No trabalho com sólidos, os professores podem começar a explorar objectos do dia-a-dia e propor a identificação das suas características. Os sólidos geométricos podem ser agrupados num de dois conjuntos: **os poliedros** e os **não-poliedros** (Figura 36).

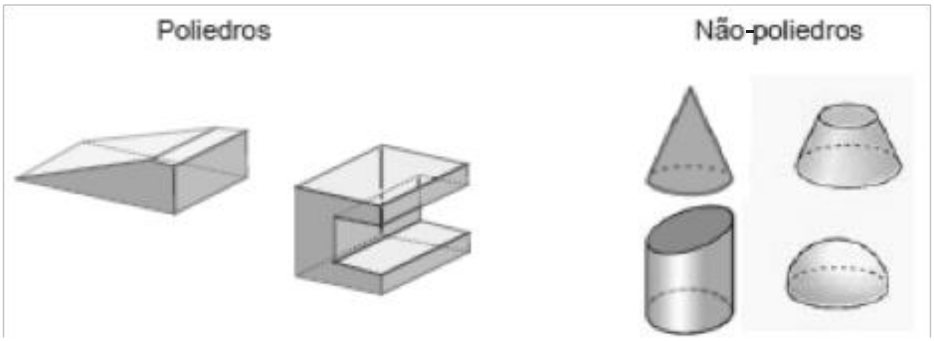


Figura 36. Poliedros e não-poliedros. (manual de 5.ª classe, p. 3)

Os **poliedros** são sólidos limitados por um número finito de superfícies planas, superfícies essas que são limitadas por linhas poligonais fechadas. Nestes sólidos podemos definir elementos que os caracterizam: faces (bases e faces laterais), arestas e vértices (Figura 37).

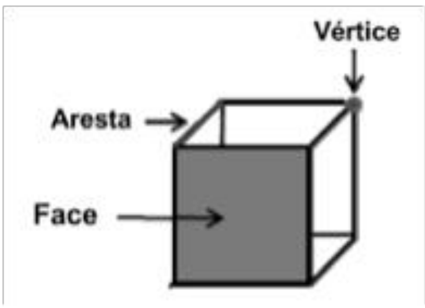


Figura 37. Elementos de um poliedro

Os poliedros podem subdividir-se em dois grupos: os prismas e as pirâmides. Os **prismas** têm duas faces congruentes paralelas (bases do prisma) e as restantes, as faces laterais, são paralelogramos. As **pirâmides** têm apenas uma base e as restantes faces, as faces laterais, são triângulos. É importante que os alunos compreendam que o paralelepípedo e o cubo são casos particulares de prismas.

Diz-se que o prisma ou pirâmide é recto(a) quando as arestas laterais são perpendiculares à base ou bases e que é oblíquo quando as arestas laterais não são perpendiculares à base ou bases.

Existem várias relações que os alunos podem identificar entre os vários elementos de prismas e pirâmides. Por exemplo, podem preencher tabelas como as que se seguem, com base na observação e na manipulação que fazem dos modelos dos sólidos geométricos:

Prismas			
Base	**Vértices**	**Faces**	**Arestas**
Quadrado	8	6	12
Triângulo	6	5	9
Hexágono	12	8	18

Pirâmides			
Base	**Vértices**	**Faces**	**Arestas**
Triângulo	4	4	6
Pentágono	6	6	10
Heptágono	8	8	14

A análise das tabelas permite identificar que nos prismas:

- o número de vértices é o dobro do número de lados do polígono da base;
- o número de arestas é o triplo do número de lados do polígono da base;
- o prisma tem mais duas faces que o número de lados do polígono da base.

Nas pirâmides:

- o número de vértices e o número de faces é igual;
- a pirâmide tem mais um vértice que o número de lados do polígono da base;
- o número de arestas é o dobro do número de lados do polígono da base.

Existe ainda uma relação que é válida para todos os poliedros, a relação de Euler (v é o número de vértices, a é o número de arestas e f o número de faces):

$$v - a + f = 2$$

Por sua vez, os **não-poliedros** são sólidos limitados por pelo menos uma superfície curva. Neste grupo temos cilindros, cones e esferas. O cilindro é limitado por duas superfícies planas circulares congruentes e paralelas (bases do cilindro) e por uma superfície curva (superfície lateral). Por sua vez, o cone é limitado por apenas uma superfície plana circular (base do cone) e por uma superfície curva. A esfera é limitada por uma superfície curva cujos pontos se encontram à mesma distância de um ponto interior da esfera, designado por centro.

Numa primeira abordagem as **planificações dos sólidos** podem ser obtidas desfazendo objectos do dia-a-dia, por exemplo uma caixa, como mostra a Figura 38:

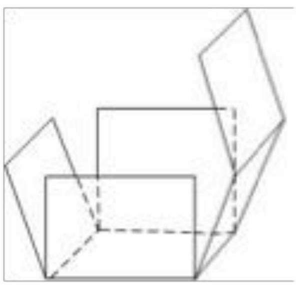


Figura 38. Planificação de um paralelepípedo

Os alunos devem também conseguir identificar se uma dada planificação é ou não planificação de um sólido, como por exemplo no caso do cubo, e verificar que um sólido pode ter diferentes planificações.

Alguns sólidos têm propriedades particulares. É o caso dos **sólidos platónicos** (ver mais em http://www.atractor.pt/mat/Polied/poliedros.html). Estes sólidos são poliedros regulares convexos, ou seja, todas as suas faces são geometricamente iguais e em cada um dos seus vértices converge o mesmo número de arestas. É interessante analisar estes sólidos. Existem apenas cinco sólidos platónicos: tetraedro (as faces são triângulos equiláteros e tem 4 faces), cubo ou hexaedro (as faces são quadrados e tem 6 faces), octaedro (as suas faces são triângulos equiláteros e tem 8 faces), dodecaedro (as suas faces são pentágonos regulares e tem 12 faces) e o icosaedro (as suas faces são triângulos equiláteros e tem 20 faces).

Rectas, semi-rectas e segmentos de recta. A introdução destes conceitos pode estar relacionada com situações do dia-a-dia das crianças. Elas podem identificar **segmentos de recta** em vários objectos da sala, por exemplo. O **segmento de recta** tem dois extremos, os pontos A e B, e representa-se pelo símbolo [AB]. O seu comprimento representa-se por $\overline{AB}$. A **semi-recta** tem início mas não tem fim. Neste caso, o ponto C é a origem da semi-recta $\dot{C}D$. A recta não tem princípio nem fim. A recta é representada pelas letras que respeitam a dois pontos que pertencem à recta ou por uma letra minúscula. Neste caso a recta representa-se por *EF* ou *s*.

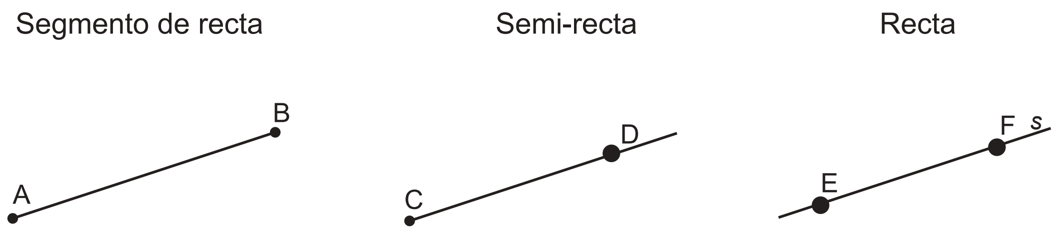
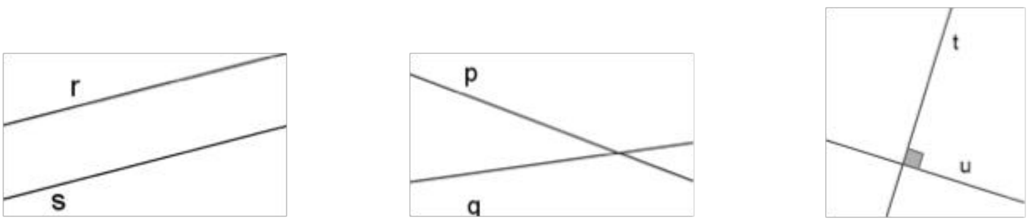


Figura 39. Segmento de recta, semi-recta e recta

No plano as rectas podem ou não ter pontos em comum. As rectas são **paralelas** quando não têm pontos em comum (*r* e *s* são estritamente paralelas) ou quando têm todos os pontos comuns (**rectas coincidentes**). Quando têm apenas um ponto em comum as rectas dizem-se **concorrentes** (*p* e *q* são rectas concorrentes). Se as rectas concorrentes formarem entre si quatro ângulos rectos então dizem-se rectas perpendiculares (*t* e *u* são rectas perpendiculares).



r e *s* são rectas estritamente paralelas *p* e *q* são rectas concorrentes *t* e *u* são rectas perpendiculares

Figura 40. Posição relativa de rectas

Pode-se, por exemplo, sugerir aos alunos que representem num desenho duas rectas paralelas (exemplos: *a* e *b, d* e *e*), duas rectas perpendiculares (exemplos: *e* e *f, d* e *b, a* e *e*) e duas rectas concorrentes não perpendiculares (exemplos: *c* e *d* ou *c* e *a*), como na Figura 41.

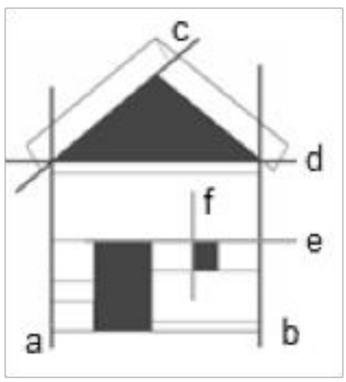


Figura 41.Rectas concorrentes e paralelas

Ângulos. A noção de ângulo pode começar a ser desenvolvida nas primeiras classes, ainda antes de ser introduzida essa noção de um modo formal e a classificação dos ângulos. Por exemplo, os alunos podem identificar ângulos usando o próprio corpo ou objectos do dia-a-dia (como é o caso do canto de uma folha de papel ou da mesa, nos ponteiros de um relógio, etc.). A Figura 42 mostra alguns exemplos.

Figura 42. Ângulos no dia-a-dia

Ângulo é toda a região plana limitada por duas semi-rectas que têm a mesma origem. Podemos deste modo identificar duas regiões do plano que correspondem a ângulos convexos e a ângulos não convexos (Figura 43).

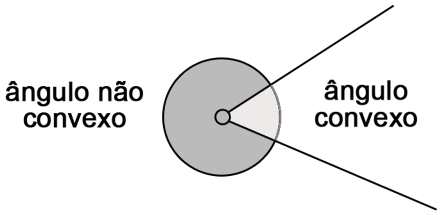


Figura 43. Ângulos convexo e não convexo

É importante que identifiquem os elementos de um ângulo: os seus lados e o seu vértice, que corresponde à origem das duas semi-rectas. No ângulo CAB os seus lados são as semi-rectas $\dot{A}B$ e $\dot{A}C$ e o vértice é o ponto A (Figura 44).

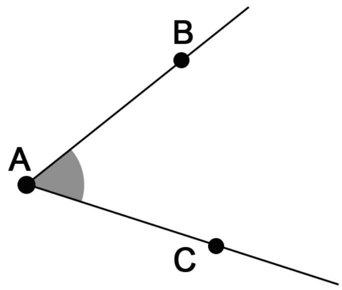


Figura 44. Ângulo

É ainda importante que os alunos desenvolvam uma boa compreensão do que é o ângulo, de modo a serem capazes de verificar que a sua amplitude não depende do comprimento dos seus lados. Por exemplo, os dois ângulos *x* e *y* são congruentes, apesar de os alunos poderem ter a percepção visual de que o ângulo *x* é maior do que o ângulo *y* (Figura 45).

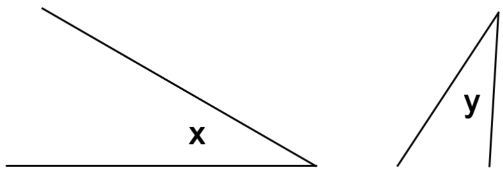
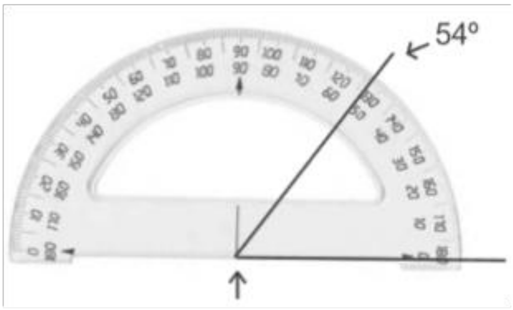


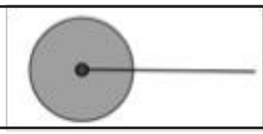
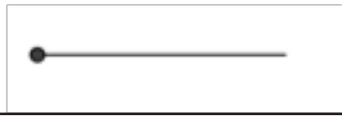
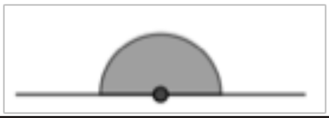
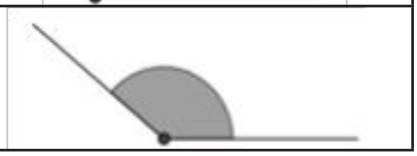
Figura 45. Comparação de ângulos

A **amplitude de um ângulo** mede-se habitualmente em graus e para a medir pode usar--se um transferidor.

- Coloca-se a linha zero do transferidor sobre um dos lados do ângulo.
- O centro do transferidor tem de coincidir com o vértice do ângulo.



Os ângulos podem ser classificados de acordo com a sua amplitude:

Nome do ângulo	**Amplitude do ângulo**	**Representação do ângulo**
Giro	360º	
Nulo	0º	
Raso	180º	
Recto	90º	
Agudo	maior do que 0º e menos do que 90º	
Obtuso	maior do que 90º e menor do que 180º	

Dois ângulos dizem-se **suplementares** quando a soma das suas amplitudes é igual a 180º e dois ângulos dizem-se **complementares** quando a soma das suas amplitudes é igual a 90º (Figura 46).

Os ângulos BCD e DCA são suplementares Os ângulos IHJ e JHO são complementares

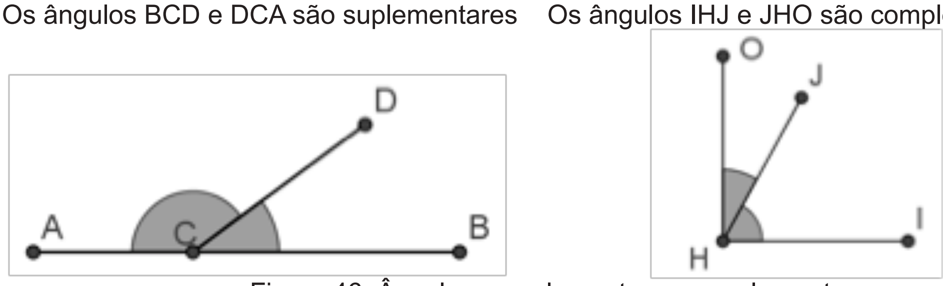


Figura 46. Ângulos complementares e suplementares

Dois ângulos dizem-se **adjacentes** se têm o mesmo vértice, um lado em comum e se cada um se situa de cada lado do lado comum. Nos exemplos anteriores os ângulos BCD e DCA são adjacentes e os ângulos IHJ e JHO são também adjacentes.

Simetria. A simetria de uma figura deixa a figura globalmente invariante. Nesta secção vamos abordar a simetria de reflexão. Quando uma figura tem **simetria de reflexão**, podemos identificar o **eixo** em relação ao qual a transformação pode ocorrer sem que a figura se altere. Na imagem A é possível identificar dois eixos de reflexão, que estão assinalados. No entanto, na imagem B não é possível identificar um eixo de reflexão que torne a imagem invariante.

Imagem A Imagem B

Figura 47. Eixo de reflexão

Os alunos podem construir ou desenhar as suas próprias figuras de modo a que estas tenham simetria de reflexão (com objectos ou num papel quadriculado ou ponteado) ou realizar dobragens em papel e recortes ou usar espelhos para investigar a existência de eixos de simetria nas figuras (Figura 48).

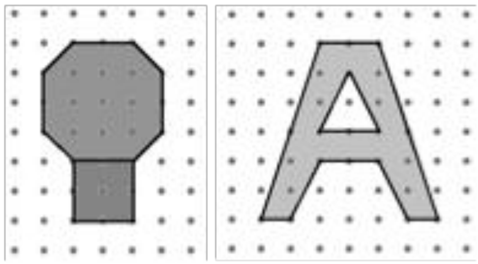


Figura 48. Simetria em figuras

Além disso, os alunos devem também ter experiências de aprendizagem que visem a representação de imagens de uma dada figura através da reflexão relativamente a um dado eixo (Figura 49).

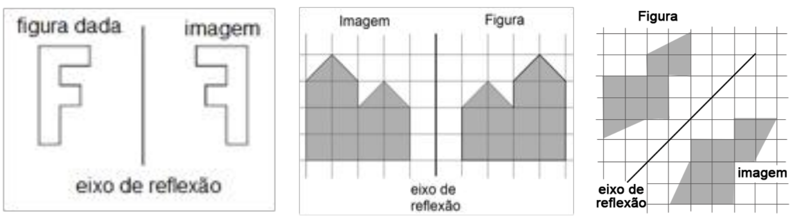
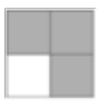


Figura 49. Reflexão de figuras

- A distância de um ponto da figura ao eixo de reflexão é igual à distância do ponto correspondente na imagem ao eixo.
- As duas figuras (figura original e imagem) são geometricamente iguais.

Frisos. Nos **frisos** existe sempre **simetria de translação**, sendo que as translações são sempre realizadas na mesma direcção. Um friso pode ser construído a partir de um motivo. Analisemos alguns exemplos em que é usado o seguinte motivo:



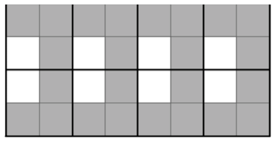
Se fizermos a sua translação, poderemos obter o seguinte friso:

Translação

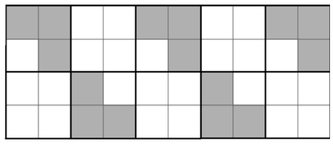
O motivo pode dar origem a um módulo que sofre a simetria de translação. Esse módulo pode ser obtido através da realização de outras simetrias (rotação – meia volta, reflexão horizontal ou vertical, reflexão deslizante). Pode-se assim obter diferentes frisos a partir do mesmo motivo. Existem sete tipos de frisos diferentes (Veloso, 1998), pelo que são apresentados os outros seis de seguida:

Translação
Reflexão vertical

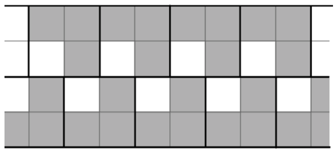
Translação
Reflexão horizontal



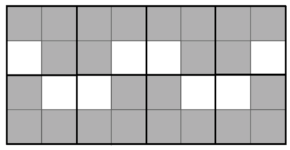
Translação
Rotação – meia volta



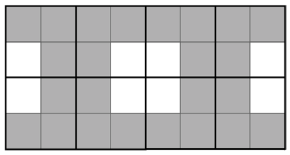
Translação
Reflexão deslizante



Translação
Reflexão vertical
Reflexão deslizante
Rotação – meia volta



Translação
Reflexão vertical
Reflexão horizontal
Rotação – meia volta



Pavimentações. Com as pavimentações pretende-se cobrir completamente o plano, sem deixar espaços em branco e sem fazer sobreposições. Os alunos podem usar diferentes figuras e fazer as suas pavimentações (em papel quadriculado ou malha triangular).

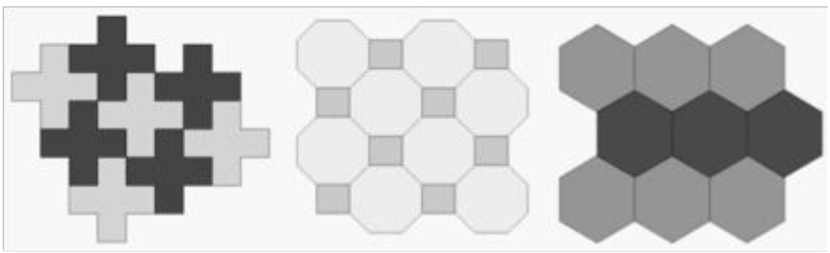


Figura 50. Pavimentações (manual da 6.ª classe, p. 51)

Podem, por exemplo, verificar quais são os polígonos regulares que pavimentam o plano e quais não o fazem. Esta situação deve envolver a experimentação por parte dos alunos. Devem tentar pavimentar usando apenas triângulos equiláteros (verificam que pavimenta), apenas quadrados (verificam que é possível pavimentar), apenas hexágonos (também pavimenta) e apenas com pentágonos (verificando que nesta situação não é possível pavimentar). Com os alunos mais velhos será possível analisar porque é que uns polígonos regulares pavimentam o plano e outros não. Para tal, têm de olhar para um ponto do plano e verificar quantos polígonos têm em torno desse ponto e analisar a amplitude dos ângulos internos dos polígonos nesse ponto, verificando se é divisor de 360º.

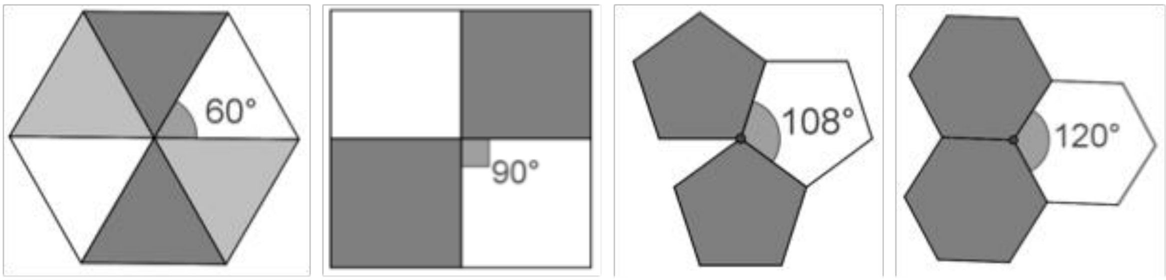


Figura 51. Pavimentação com polígonos regulares

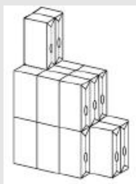
Actividade 5.2. A

1. O formador apresenta uma figura como a que está abaixo durante alguns segundos e solicita aos formandos que a reproduzam numa folha de papel. Depois de a desenharem, o formador mostra novamente a figura para todos verificarem se a reproduziram correctamente.

2. Explique que características identificaram que permitiram a sua reprodução.
3. Com base nas capacidades de visualização descritas no Anexo 11, indique quais são as capacidades de visualização implícitas nesta tarefa.
4. Proponha a realização desta actividade (com esta ou outra figura) aos seus alunos e recolha as suas produções. Em conjunto, identifiquem o que representaram correctamente e em que aspecto revelam dificuldade no desenho. Noutras oportunidades faça a mesma actividade com figuras mais complexas.

Actividade 5.2. B

1. Indique quantas caixas estão arrumadas.



2. Explique como podem os alunos proceder à contagem das caixas.
3. Formule uma nova questão com base na figura dada que envolva o cálculo do volume.
4. O grupo de formação deve partilhar entre si as várias questões formuladas e identificar dificuldades ou estratégias dos alunos.

Actividade 5.2. C

Planifiquem uma aula em que os alunos vão construir uma maqueta da sala de aula. Este trabalho exige algum planeamento com os alunos e alguma discussão prévia do que incluir na maqueta e que material usar para o representar. Depois de realizada a maqueta, pode ser proposta a realização de uma planta da sala, numa folha de papel rectangular onde os alunos devem desenhar os objectos principais, vistos de cima.

Actividade 5.2. D

1. Analise a seguinte resposta de um aluno:

	N.º de vértices	N.º de faces	N.º de arestas
a	8	6	12
b	6	6	9

a) Com base nas respostas do aluno, indique que sólido poderá ser o *a*.

b) O número de faces do sólido *b* está errado. Com base nas relações exploradas na secção anterior, indique de que sólido se pode tratar e qual é o número correcto de faces.

2. Utilize modelos de sólidos para verificar as respostas dadas na questão 1.

3. Identifique as relações que pode identificar nesta tabela e explorar com os alunos para promover a compreensão deles das propriedades dos sólidos e melhorarem o seu desempenho quando analisam representações no plano de modelos de sólidos.

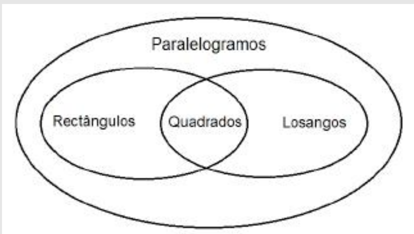
Actividade 5.2. E

1. Represente diversos paralelogramos numa folha quadriculada.

2. Registe as medidas dos lados e dos ângulos de cada paralelogramo desenhado.

3. Classifique esses paralelogramos.

4. Analise o diagrama abaixo e escreva algumas das principais conclusões que ele evidencia.



5. Confronte a classificação dos paralelogramos realizada em 3 com as relações identificadas em 4.

Actividade 5.2. F

1. Construa o triângulo ABC com as seguintes características (construção de triângulos no Anexo 12):
   - É isósceles;
   - tem de perímetro 14 centímetros;
   - um dos lados mede 3 centímetros.

2. Poderia ter construído um triângulo diferente com as informações dadas? Justifique a sua resposta.

3. Discuta outras situações que podem ser exploradas na sala de aula aquando da construção de triângulos. Por exemplo, pode solicitar aos alunos que desenhem um triângulo com um ângulo recto e dois lados com igual comprimento e que registem as medidas dos ângulos e as medidas dos lados. No final pode registar no quadro as medidas dos vários triângulos que foram construídos na turma.

Actividade 5.2. G

1. Utilize o geoplano para representar as figuras com as seguintes condições (adaptado de Ponte e Serrazina, 2000):
   – Pelo menos um ângulo recto;
   – Exactamente dois ângulos rectos;
   – Nenhum ângulo recto;
   – Dois ângulos obtusos;
   – Só ângulos agudos.
2. Discutir no grupo de formação as figuras obtidas para cada uma das situações.
3. Relativamente ao trabalho em sala de aula com alunos, discutam os objectivos que esta actividade pode visar e o modo como os registos devem ser efectuados pelos alunos.
4. Discutam os desafios para o professor que esta actividade pode trazer e as estratégias que o professor pode usar para a sua dinamização.

5.3. Grandezas e medida

O estudo desta temática caracteriza-se pelo conhecimento das principais grandezas, por fazer medições, pela comparação dos resultados de medições, pelo estabelecimento de relações temporais e pelo conhecimento do dinheiro. Deve promover-se ainda a realização de estimativas.

Na formação de professores é importante promover a compreensão das diferentes grandezas, da noção de medir e desenvolver experiências relativas a situações que desenvolvem esta compreensão nos alunos. São de seguida apresentadas diversas situações que envolvem a noção de grandeza, o conceito de medida e o conhecimento das principais unidades de medida. O trabalho com grandezas e medida surge de um modo significativo no âmbito da resolução de problemas, relativos a situações do dia-a-dia, e em articulação com os números e operações.

No seu quotidiano os alunos envolvem-se em situações relativas a diversas grandezas e desenvolvem intuitivamente a noção de medida, pela comparação e a ordenação de objectos de acordo com um dado atributo. Para a compreensão do processo de medição é essencial o envolvimento dos alunos em experiências concretas, utilizando diferentes unidades de medida e medindo diferentes objectos com a mesma unidade de medida.

Este trabalho envolve o conhecimento dos números racionais e das estruturas multiplicativas. Ao longo da escolaridade os alunos devem contactar com as unidades de medida convencionais e utilizar os instrumentos adequados ao processo de medição das diferentes grandezas. Deste modo, podem envolver-se na análise e na resolução de situações do seu meio, articulando assim o conhecimento matemático com o conhecimento de Meio Físico e Social.

Grandezas. Em primeiro lugar é importante compreender o que é um **atributo mensurável**: “um atributo mensurável é uma propriedade de um objecto passível de ser quantificada” (NCTM, 2007, p. 48). Vamos analisar o conjunto dos objectos da Figura 52 e identificar atributos mensuráveis nesse conjunto de objectos.

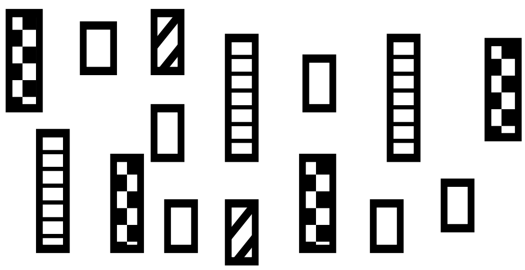


Figura 52. Conjunto de barras

A identificação do atributo mensurável permite-nos depois comparar e ordenar os objectos de acordo com o atributo escolhido. A comparação dá origem a uma partição no conjunto de objectos de maneira que cada subconjunto é formado por objectos que têm igual atributo. Nesta situação podemos formar os seguintes subconjuntos:

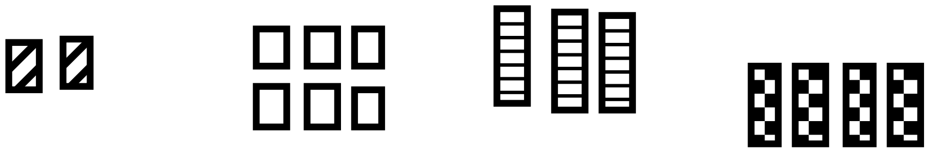


Figura 53. Comparação de acordo com o atributo comprimento

Cada subconjunto é formado por objectos que têm igual comprimento, pelo que cada subconjunto define um comprimento. Os alunos das 1.as classes podem começar por usar os termos "maior do que" e "menor do que" para ordenar os vários subconjuntos formados.

Perante um dado objecto, os alunos podem identificar vários atributos mensuráveis:

Que quantidade de flocos leva o pacote? (capacidade)
Qual é a sua altura? (comprimento)
Qual é a área de uma das faces? (área)
Quanto pesa? (massa)
Qual é o perímetro da face? (comprimento)

Existe um conjunto de grandezas que os alunos exploram na escola: **comprimento, área, volume, dinheiro, tempo, massa e capacidade**. Depois de uma abordagem intuitiva da noção de medida que é a seguir introduzida, os alunos começam a utilizar as unidades de medida convencionais e os instrumentos de medição adequados para as diferentes grandezas. Cada grandeza é depois discutida, salientando-se a importância do seu surgimento em situações problemáticas.

Medir. O **processo de medição** consiste em atribuir um número real a uma quantidade de uma grandeza; para tal é necessário comparar uma quantidade dada de comprimento, massa, volume, etc., com o comprimento, massa ou volume de um dado objecto a que chamamos unidade de medida (Ponte & Serrazina, 2000). Assim, medir uma grandeza é **compará-la com uma unidade**. Nos primeiros anos:

> *os alunos deverão iniciar o estudo da medida com unidades não convencionais. Deverão ser encorajados a utilizar uma variedade de objectos, tais como fósforos para medir o comprimento, quadrados de cartão para medir a área e pequenos cubos para medir o volume.* (NCTM, 2007, p. 49)

Para medir uma dada grandeza os alunos têm de seleccionar a unidade de medida, comparar a unidade com o objecto e registar o número de unidades (NCTM, 1991). Por exemplo, definir como unidade de medida o palmo e medir o comprimento do quadro. Isto consiste em ver quantas vezes o palmo cabe no comprimento do quadro. Esse número será o comprimento do quadro naquela unidade de medida. Se vários alunos fizerem essa medição usando o seu palmo, é natural que se obtenham várias medidas para o comprimento. Esta experiência é importante para que os alunos percebam a importância de definir uma unidade de medida comum a todos os alunos. Se, no lugar de usar o seu palmo, vários alunos usarem como unidade de medida o apagador, vão todos obter o mesmo valor, pois a unidade de medida é a mesma. É importante que os alunos percebam que têm de justapor a unidade de medida para que a medição seja o mais exacta possível. Quando possuem apenas uma unidade de medida, têm de marcar onde termina uma unidade e colocar a unidade seguinte a partir desse ponto. Na Figura 54 usa-se como unidade de medida o fósforo para medir o comprimento de um dos lados do caderno.

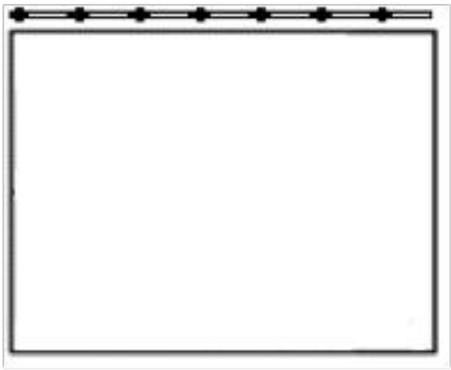


Figura 54. O comprimento do lado do caderno é 7 unidades de comprimento (7 fósforos)

Para outras grandezas podem fazer experiências semelhantes. Por exemplo, usar como unidade de medida um copo e encher recipientes de diferentes tamanhos e formas e registar a medida de cada um para posteriormente os ordenar de acordo com a sua capacidade.

Relativamente à área, podem usar-se pequenos quadrados de papel (todos iguais) como unidade de medida da área e medir várias superfícies de modo a compará-las. É importante que os alunos percebam que têm de justapor a unidade de medida para que a medição seja o mais exacta possível. Podemos colocar várias unidades sobre a superfície para a cobrir e determinar a sua medida. Pode-se colocar apenas unidades inteiras e indicar um valor aproximado (Figura 55) ou melhorar essa aproximação com a subdivisão da unidade em partes iguais (Figura 56).

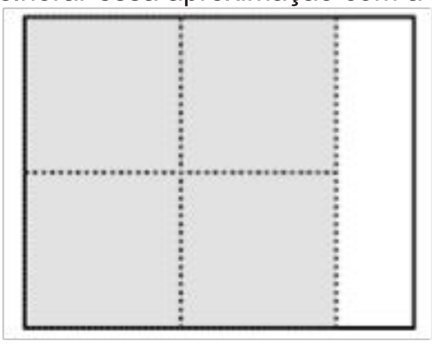


Figura 55. A área da folha é mais de 4 unidades de área

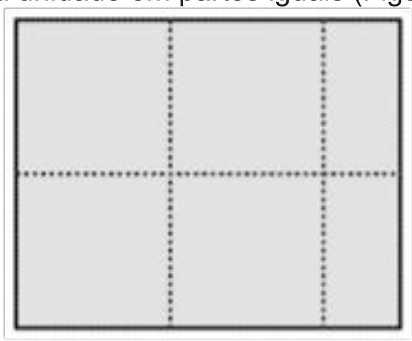


Figura 56. A área da folha é 5 unidades de área

No estudo da área, o trabalho com o papel quadriculado ou a malha triangular (Anexo 14) é fundamental, podendo os alunos desenhar figuras com uma área indicada pelo professor.

No caso do volume, de modo idêntico, podemos usar como unidade de medida um pequeno cubo para determinar quantos cubos pequenos ocupam o mesmo espaço que o objecto a medir.

As unidades de medida convencionais do **Sistema Internacional de Unidades** (**SI**) das grandezas em estudo são as seguintes:

Unidades-base		
Grandeza	**Unidade SI**	**Símbolo**
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s

Unidades-base		
Grandeza	**Unidade SI**	**Símbolo**
Superfície	metro quadrado	m^2
Volume	metro cúbico	m^3

Existem também unidades de medida convencionais que usamos mas que não fazem parte do Sistema Internacional:

Nome	Símbolo	Valor em unidade SI
minuto	min	1 min = 60 s
hora	h	1 h = 60 min = 3600 s
dia	d	1 d = 24 h = 86400 s
grau	°	1° = (π/180) rad
litro	l ou L	1 l = 1 dm^3= $10^{-3}m^3$
tonelada	t	1 t = 103 kg
are	a	1 a = 1 dam^2
hectare	ha	1 ha = 1 hm^2

Estimação. Em várias situações do dia-a-dia não é necessário saber a medida exacta, pelo que é importante que os alunos desenvolvam a sua capacidade de **estimar**. Por exemplo, pode não ser necessário saberem a altura da porta da sala de aula, mas é importante que consigam fazer uma estimativa desse comprimento. Este é um processo importante para a compreensão do que significa medir e da grandeza dos valores. Por exemplo, será certamente absurdo um aluno indicar como estimativa que a porta mede 5 metros. Se tal acontecer, o professor deve propor a análise de alguns comprimentos que contribuam para essa compreensão (por exemplo, usando a altura do aluno, perguntar quantos meninos com a sua altura são necessários para perfazer a altura da porta). Tendo noção da sua altura, o aluno verá que não devem ser necessários mais que dois alunos e por isso a altura da porta nunca poderá ser de 5 metros. Assim, o professor deve proporcionar experiências que envolvam o desenvolvimento de estratégias de estimação:

- Visualizar a unidade que se vai usar na estimação e repeti-la mentalmente sobre o objecto a medir;
- Comparar a medida do objecto a medir com a medida de um objecto conhecido;
- Usar objectos iguais regularmente distribuídos no objecto a medir;
- Achar metades no caso em que o objecto a medir é demasiado grande; pode estimar-se a metade. Se a metade ainda for grande, pode estimar-se a metade da metade e assim sucessivamente, enquanto for necessário. (Ponte & Serrazina, 2000)

Será também importante que se confrontem as estimativas feitas com as medidas obtidas pelos instrumentos apropriados de medida.

Comprimento. A **unidade-base** é o metro (m), os seus múltiplos o quilómetro (km), o hectómetro (hm) e o decâmetro (dam) e os seus submúltiplos o decímetro (dm), o centímetro (cm) e o milímetro (mm). É importante que os alunos desenvolvam a sua compreensão da relação entre as várias unidades, de modo a dar sentido às transformações de medidas de uma unidade noutra (Figura 57).

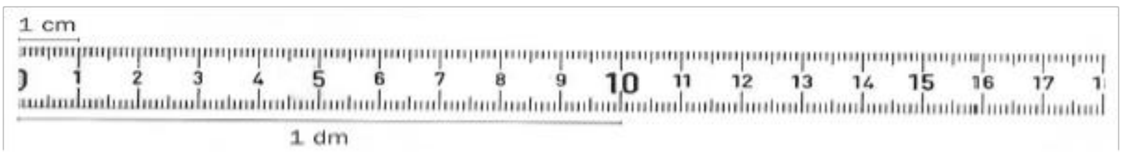


Figura 57. Unidades de medida convencionais – comprimento

Depois de desenvolver a compreensão do que é medir os alunos devem utilizar a régua para realizar medições, compreendendo que está a ser usada como unidade de medida 1 cm. Devem ser também proporcionadas situações em que unidade de medida é 1 dm e outras em que a unidade de medida é 1 m para que os alunos tenham percepção que há situações em que uma unidade de medida é mais adequada que outra.

Um contexto que surge no âmbito desta grandeza é a determinação de **perímetros de figuras**. Para além de figuras dadas pelo professor com a indicação das medidas ou em que os alunos realizam a medição do comprimento dos lados com os instrumentos adequados, os alunos podem determinar o perímetro de figuras construídas no geoplano, que podem representar também no papel ponteado (Anexo 15).

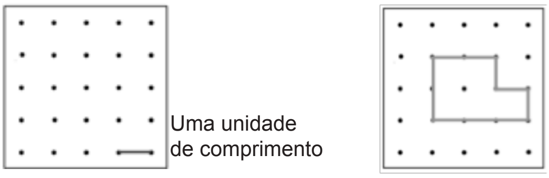


Figura 58. Figuras no geoplano – perímetro

Nesta situação os alunos podem dizer facilmente que o perímetro da figura (Figura 58) construída no geoplano é de 10 unidades de comprimento. Na realização deste tipo de actividades é preciso ter em atenção o cálculo do perímetro de figuras em que os lados são diagonais do geoplano, uma vez que a diagonal como está representada na figura mede mais que uma unidade (decorrente da utilização do Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal de um quadrado que tem de lado uma unidade de comprimento verifica-se que essa diagonal mede $\sqrt{2}$, ou seja, aproximadamente 1,41). Assim, os alunos nesta situação poderão dizer que o perímetro é superior a 8 unidades de comprimento e menor que 9 unidades de comprimento (Figura 59).

Figura 59. Perímetro da figura no geoplano

Área. Depois das experiências iniciais que promovem o desenvolvimento do conceito de **área** referente à cobertura, sem deixar espaços e sem sobreposições (pavimentações), de uma superfície com uma unidade repetida os alunos podem explorar situações que lhes permitem fazer comparações entre a medida da área de diferentes figuras. Por exemplo, podem construir pentaminós (usam cinco quadrados iguais para construir as 12 figuras e verificar que todas elas têm a mesma área), podem usar as peças do tangram para construir diferentes formas (verificam que todas têm a mesma área pois são construídas usando as mesmas peças do tangram). Deste modo exploram **figuras equivalentes**, ou seja, figuras com a mesma área.
Outra etapa importante é a utilização do geoplano (figura 60) ou do papel quadriculado para o cálculo da área de diferentes figuras do plano.

Figura 60. Unidade de área no geoplano

Com o geoplano pode ser solicitado aos alunos que construam uma figura com 4 unidades de área, por exemplo. Nesta situação podem surgir figuras muito diversificadas, devendo os alunos explicar porque é que a sua figura tem 4 unidades de área. Nas Figuras 61 e 62 o cálculo da área da figura construída é feito por decomposição da figura, enquanto que na Figura 63 o cálculo da área da figura construída é feito por enquadramento.

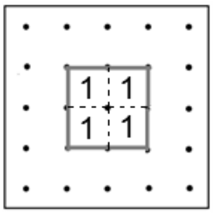


Figura 61. Área figura *a*

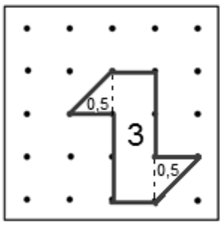


Figura 62. Área figura *b*

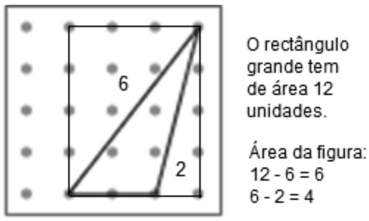


Figura 63. Área figura *c*

A aprendizagem dos alunos deve ser progressiva, pelo que, depois de compreendida esta grandeza, os alunos devem começar a determinar a medida, tendo por base as unidades de medida convencionais.

Uma actividade pertinente é a construção do decímetro quadrado e do metro quadrado. Para tal pode utilizar a folha de papel quadriculado (em que a quadrícula tem 1 cm de lado) e recortar um quadrado com 1 dm de lado (ou seja, 10 cm de lado). Os alunos devem verificar que um quadrado com 1 dm de lado é um quadrado com 1 dm^2 de área, o que equivale a 100 cm^2 de área. Para a construção do metro quadrado utilizam-se os quadrados de 1 dm^2 de área para formar um quadrado com 1 metro de lado, ou seja, com 10 dm de lado. Os alunos vão verificar que são necessários 100 dm^2 para obter 1m^2. Deve unir todos os quadros usando fita-cola ou colando-os numa folha de papel grande para que o metro quadrado não se desfaça. Este metro quadrado pode ser utilizado para medir a área de diferentes superfícies (por exemplo, a área aproximada do quadro, da porta, etc.).

Os alunos exploram depois áreas de diferentes figuras, como no caso de um rectângulo com 5 cm de comprimento e 3 cm de largura, em que verificam que ele contém 15 quadrados com 1 cm^2 de área.

As fórmulas das áreas devem ser deduzidas e não introduzidas de forma descontextualizada, e os alunos devem passar a utilizá-las para calcular áreas em problemas de contextos diversificados.

Volume. O volume de uma figura tridimensional é a quantidade de espaço que esta ocupa. Para introdução desta noção podem fazer-se experiências mergulhando objectos num copo com água. Dois sólidos dizem-se equivalentes se têm o mesmo volume.

Pode fazer-se a seguinte experiência:

Materiais:

3 copos iguais e transparentes

Água

3 objectos que possam ser mergulhados em água

Marcador

Como fazer:

Colocar água nos três copos em igual quantidade e marcar o nível da água nos três copos com o marcador.

Mergulhar cada um dos objectos num dos copos de água.

Com o marcador, marcar novamente o nível da água.

Registar as conclusões a que se pode chegar.

Retirar os objectos da água e ordená-los de acordo com o seu volume, do maior para o mais pequeno.

As fórmulas do volume dos vários sólidos devem ser introduzidas de modo a promover a sua compreensão por parte dos alunos.

Capacidade. A capacidade é a quantidade de espaço ou de líquido que um objecto pode conter, diferenciando-se assim do volume, que respeita à quantidade de espaço que esse objecto ocupa. O estudo da capacidade deve surgir associado à realização de experiência com objectos do dia-a-dia e depois no contexto de problemas. Os alunos podem verificar, dentro de um conjunto de jarros (Figura 64), quais são os que têm maior capacidade comparando a quantidade de líquido que podem conter.

Figura 64. Jarros para comparação de capacidades

Dinheiro. É importante que os alunos desde os primeiros anos conheçam e relacionem as moedas e as notas da dobra (Dbs). O professor deve, por exemplo, propor problemas que envolvam situações de compra para que os alunos relacionem o dinheiro e simulem trocos. Na sala de aula será ainda possível simular uma situação de mercado em que os alunos usem representações das moedas e das notas para realizar operações e verificar se têm dinheiro suficiente para realizar uma compra, por exemplo. Estas situações são também importantes para que os alunos desenvolvam a sua destreza de cálculo mental.

Tempo. No seu quotidiano os alunos identificam já acontecimentos que são sequenciais no tempo. Cabe ao professor ajudá-los a aprofundar esse conhecimento e a ampliá-lo desenvolvendo neles a percepção da duração de acontecimentos e a capacidade de utilizar instrumentos de medição de tempo. Nas suas primeiras experiências podem sequenciar várias situações que fazem parte da sua rotina diária, as acções que realizam ao longo de uma semana ou num período mais alargado de tempo. Devem explorar calendários, relacionando o dia, a semana, o mês e o ano. Nesses calendários podem identificar datas importantes, como a data do seu aniversário, alguns feriados, o período de férias escolares, as estações do ano, etc. Podem analisar horários, relacionando a hora com o dia e identificando actividades que decorrem de manhã, de tarde e à noite.

Progressivamente, os alunos devem relacionar o segundo, o minuto e a hora, conseguindo indicar as horas a partir de um relógio analógico. Uma experiência importante para os alunos envolve a noção de intervalo de tempo. Os alunos devem medir a duração de alguns acontecimentos, por exemplo o tempo que demoram de casa à escola ou o tempo que dedicam à leitura de um texto. Devem também indicar estimativas sobre o tempo que demoram a realizar uma determinada actividade. Uma situação que podem fazer em sala de aula é indicar quanto tempo acham que demoram a percorrer a sala de uma ponta a outra cinco vezes (pode aqui discutir-se se os alunos fazem o percurso a andar ou a correr). A sua estimativa pode depois ser confrontada com o tempo real que demorou a actividade.

Outra situação será prever o número de vezes que conseguem realizar uma actividade num dado tempo. Por exemplo, estimar quantas vezes consegue escrever o seu primeiro nome em quinze segundos, e num minuto. O professor controla o tempo dizendo aos alunos quando devem começar e quando devem parar. Durante a experiência, os alunos podem fazer o registo da sua estimativa e confrontar esse valor com o número real de vezes que conseguem fazer essa actividade. Podem registar os valores numa tabela como a seguinte, realizando a actividade durante um minuto (cronometrado):

Actividade	Em 15 segundos	Num minuto (previsão)	Num minuto (real)

Massa. Massa é a grandeza que mede a quantidade de matéria de um corpo. Os alunos devem ter a experiência de pegar em objectos e estimar a sua massa (o termo mais utilizado é “peso”). Podem comparar objectos e indicar qual é mais pesado e qual é menos pesado. Esses objectos podem ser de materiais diferentes e pode proporcionar-se aos alunos a experiência de verificar que o objecto maior nem sempre é o mais pesado. Mais tarde os alunos devem usar balanças para medir a massa de diferentes objectos e relacionar este trabalho com a representação decimal dos números racionais. Situações problemáticas são também pertinentes para os alunos relacionarem diferentes unidades de medida de massa.

Actividade 5.3. A

1. Conceba uma tarefa em que é promovido o cálculo da área de figuras a partir da utilização do geoplano. Indique as instruções que dá aos alunos e as questões que lhes coloca.

Actividade 5.3. B

1. Prepare uma actividade que poderá desenvolver com os alunos que vise a articulação entre o trabalho com números racionais e a promoção da noção de dinheiro como medida, promovendo a relação entre as diversas moedas e notas.

Actividade 5.3. C

1. Faça a estimativa da medida da área de diversas superfícies da sala (exemplos: superfície da mesa, superfície da porta, superfície do quadro, chão).
2. Construam, em colaboração, um metro quadrado e utilizem-no para determinar o valor aproximado das áreas das superfícies antes estimadas.
3. Planifiquem uma aula em que construam com os alunos o metro quadrado e o usem para determinar a área de diferentes superfícies.

Actividade 5.3. D

1. Faça a experiência de comparação dos volumes de objectos ao mergulhá-los em recipientes com água.
2. Reflicta sobre a aprendizagem que esta experiência pode promover nos alunos.

5.4. Estatística

A estatística surge nos programas das 5.ª e 6.ª classes. Esta área envolve diversos conceitos que, apesar de poderem não ser entendidos como muito complexos, exigem alguma clarificação e algum aprofundamento para não serem compreendidos de um modo incompleto ou mesmo errado. A discussão em torno destes conceitos deve ter por base vários exemplos que vão sendo apresentados neste guia e outros que possam ser sugeridos pelo formador ou pelos formandos de acordo com as suas necessidades. A abordagem à estatística deve envolver a realização de investigações estatísticas em que os formandos participam nas suas várias etapas, desde a formulação de questões à recolha de dados e resposta a essas questões. Deste modo os professores devem compreender o que envolve uma investigação estatística e como podem proporcionar aos seus alunos esta experiência matemática.

Investigação estatística e variáveis. A realização de uma investigação estatística tem por base a formulação de uma questão que envolve dados que variam. Por exemplo, pode ser interessante estudar como varia o número de irmãos dos alunos de uma turma, mas o mesmo não aconteceria se pretendêssemos estudar se os alunos têm nome (Martins & Ponte, 2010). A realização de uma investigação estatística envolve quatro fases, sendo que, no final, a análise e a interpretação de dados e resultados podem fazer surgir um novo problema ou a reformulação das questões iniciais (Figura 65).

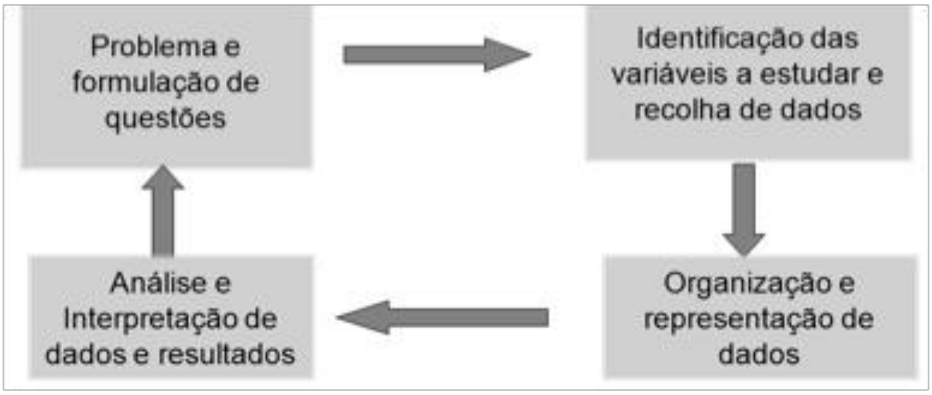


Figura 65. Fases da investigação estatística

A estatística visa estudar um conjunto de indivíduos que têm características em comum. Essa característica designa-se por **variável** e assume um número ou uma categoria diferente entre os vários indivíduos. É sobre esse indivíduo que se recolhe informação e o valor que a variável assume designa-se por **dado**. Por exemplo, se pretendermos estudar o número de irmãos dos alunos da turma da Teresa, o número de irmãos é a variável que se pretende estudar. Se a Teresa tiver três irmãos, 3 é o dado estatístico relativo à Teresa. Ao recolher os dados relativos a todos os alunos da turma, podemos obter vários valores (por exemplo, 0 irmãos, 1 irmão, 2 irmãos, 3 irmãos, etc.).

Podemos ter dois tipos de variável: a **variável quantitativa**, se a característica se pode contar ou medir, e a **variável qualitativa**, se a característica não se pode contar ou medir. Exemplos de variáveis quantitativas são: o número de irmãos, a altura dos indivíduos, a sua idade. As variáveis quantitativas que envolvem contagem dizem-se **variáveis discretas** e as variáveis quantitativas que se podem medir são **variáveis contínuas**. Por sua vez, exemplos de variáveis qualitativas são: a cor dos olhos, o estado civil de um conjunto de indivíduos, o meio de deslocação para o seu emprego.

Recolha, organização e interpretação de dados. A recolha de dados deve ser preparada de modo a dar resposta às questões. Depois de recolhidos, os dados podem ser organizados por tabelas ou gráficos. A organização dos dados envolve a identificação das diferentes **categorias ou modalidades** que a variável assume, no caso de ser qualitativa, e dos **valores** que assume, no caso de ser quantitativa. Numa tabela é possível fazer a contagem dos dados relativos a cada uma das categorias ou a cada um dos valores de modo a facilitar a identificação da **frequência absoluta**, tal como mostra a tabela da Figura 66. Nesta situação o aluno fez em primeiro lugar o registo da contagem e depois indicou a frequência absoluta de cada valor.

Tarefa "As notas dos alunos"- A tabela seguinte mostra as notas dos 24 primeiros alunos que chegaram à escola Patrice Lumumba:

2	5	2	4	5	3	4	5
5	1	0	6	5	6	3	3
5	3	5	0	6	5	0	5

Organiza uma tabela de frequência.

Valores	Contagem	Frequência
0	III	3
1	I	1
2	II	2
3	III	4
4	II	2
5	HHH IIII	8
6	III	3

Figura 66. Tabela de frequências elaborada por um aluno

Apesar de o aluno realizar correctamente a tabela, revela alguma falta de atenção em relação à contagem feita. Destacam-se duas falhas principais: uma refere-se às frequências absolutas dos valores 3 e 5 e a outra refere-se à falta de confirmação quanto ao total de frequências absolutas na tabela do aluno (22), enquanto o enunciado indica que a dimensão da população é 24. O professor deve incentivar os alunos a indicarem no final da tabela a soma das frequências absolutas, que é igual à dimensão da amostra, como modo de ajudar a regular a sua correcta elaboração.

Quando os alunos começam a trabalhar com numerais decimais e com fracções, podem também calcular a **frequência relativa** que se obtém dividindo a frequência absoluta de uma categoria pela dimensão da amostra (número total de elementos). A soma das frequências relativas é igual a 1 (ou 100%).

Gráfico de barras. O gráfico de barras permite visualizar a informação da tabela de frequências. Na construção de gráficos de barras há vários aspectos a considerar, nomeadamente: (i) Num dos eixos assinalam-se as várias modalidades ou os valores da variável, igualmente espaçados; (ii) O outro eixo respeita às frequências, sendo esta a única dimensão que varia; (iii) Em cada modalidade ou valor desenha-se uma barra com altura proporcional à sua frequência absoluta; (iv) Todas as barras do gráfico devem ter a mesma largura; (v) O gráfico deve ter um título adequado.

Considerando os dados apresentados na tarefa "As notas dos alunos", um aluno representou o seguinte gráfico de barras (Figura 67):

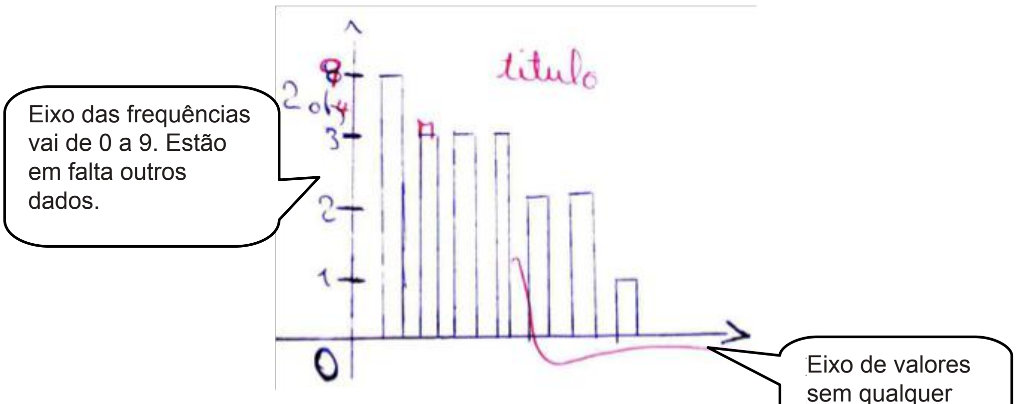


Figura 67. Gráfico de barras de um aluno

O eixo vertical relativo às frequências absolutas deveria incluir os valores de zero a nove. Contudo, o aluno suprimiu os valores 5, 6, 7 e 8. O aluno não consolidou os conhecimentos relativos à construção de gráficos, pelas seguintes razões:

- Não ter colocado no gráfico todos os elementos que devem fazer parte na sua construção (os valores que a variável assume no eixo horizontal, a escala correcta do eixo vertical, o título);
- Não ter feito a correspondência entre as frequências absolutas no gráfico e os valores da tabela na construção das barras.

Moda e média aritmética. Num conjunto de dados, quer qualitativos, quer quantitativos, se existir uma categoria ou valor com maior frequência absoluta, a essa categoria ou valor dá-se o nome de **moda**. Nesta situação é importante ter em atenção alguns erros que os alunos cometem como por exemplo indicar como sendo a moda o maior valor da frequência absoluta e não a modalidade ou o valor a que essa frequência corresponde. Ao contrário do que acontece com a moda, que pode ser determinada tanto para dados qualitativos como para dados quantitativos, a média apenas se determina para dados quantitativos. A **média** (tal como a moda) é uma medida de localização do centro da amostra. Esta calcula-se adicionando todos os valores da amostra e dividindo esse resultado pelo número total de dados da amostra (dimensão da amostra). Por exemplo, se em quatro dias de Verão forem registadas as temperaturas máximas de 30, 33, 35 e 33, a média das temperaturas nesses quatro dias é calculada fazendo:

$$\frac{30 + 33 + 35 + 33}{4} = 32{,}75$$

Para os dados organizados numa tabela, pode proceder-se do modo seguinte:

Dimensão do agregado familiar	Frequência absoluta
2	2
3	7
4	9
5	3
6	3
7	0
Total:	24

$$\frac{2 \times 2 + 3 \times 7 + 4 \times 9 + 5 \times 3 + 6 \times 3 + 7 \times 0}{24} = 3{,}9$$

Este valor indica que em média o agregado familiar é constituído por 3,9 indivíduos.

Actividade 5.4. A

1. Classifique as seguintes variáveis como qualitativas ou quantitativas. No caso de serem quantitativas classifique-as ainda como discretas ou contínuas.

a) Avaliação dos alunos de uma turma;

b) Tempo gasto pelos alunos no caminho de casa para a escola;

c) Idade dos alunos da turma;

d) Profissão dos pais dos alunos de uma turma;

e) Número de pessoas do agregado familiar;

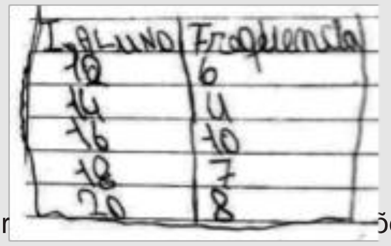
f) Número de divisões das casas de uma aldeia;

g) Desporto preferido.

2. Em pequeno grupo identifiquem as principais características a estudar para caracterizar uma turma e formulem possíveis questões a realizar. Classifique as variáveis envolvidas. Com base nas ideias discutidas, preparem a realização de uma investigação estatística em que os alunos tenham o papel principal nas várias fases que a envolvem.

Actividade 5.4. B

1. Considere a seguinte tarefa: "As idades dos alunos". Na escola de Santana temos: seis alunos com 12 anos, quatro com 14, dez com 16, sete com 18 e oito com 20. Perante estes dados um aluno elabora a tabela seguinte. Indique se a tabela está correcta.



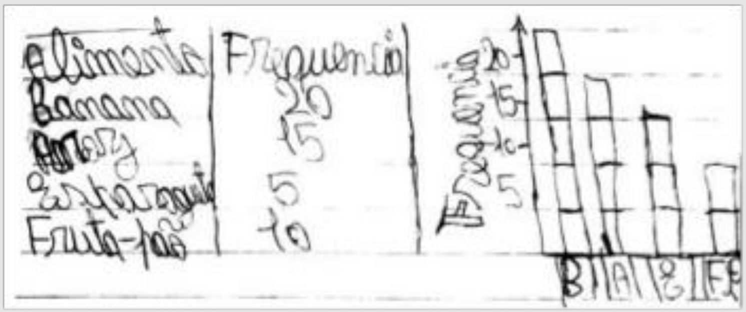
I. ALUNO	Frequência
12	6
14	4
16	10
18	7
20	8

2. Com base nesta tabela, for ões que poderia formular para os alunos com o objectivo de promover a sua interpretação.

3. Calcule a média das idades dos alunos. Discuta com os seus colegas a informação que esta medida dá relativamente a estes dados.

Actividade 5.4. C

1. Analise o gráfico construído por um aluno tendo em conta a informação da tabela de frequências:



2. Reflicta sobre o trabalho a desenvolver com os alunos para os ajudar a ultrapassar as suas dificuldades.

5.5. Proporcionalidade directa

São vários os aspectos que devem ser discutidos com os formandos, quer relativos à abordagem da proporcionalidade directa em sala de aula, quer sobre os conceitos específicos desta temática. Essa discussão deve ter por base os vários exemplos que vão sendo apresentados neste manual e outros que possam ser sugeridos pelo formador ou pelos formandos de acordo com as suas necessidades. A abordagem à proporcionalidade directa deve iniciar-se com a análise de várias situações do quotidiano, identificando-se a importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos para a resolução de vários problemas do seu dia-a-dia. As duas secções que se seguem, de discussão de conceitos fundamentais e de sugestões de trabalho para a formação, devem surgir de modo articulado de modo a promover a aprendizagem dos formandos e a análise de reflexão sobre a prática do professor.

No seu dia-a-dia, os alunos são confrontados com diversas situações de proporcionalidade directa. Contudo, também são colocados perante situações que não são de proporcionalidade directa. Deste modo, é importante que o professor proponha a análise de diversas situações que possibilitem aos alunos distinguir situações de proporcionalidade directa de situações que não são de proporcionalidade directa.

Assim, as situações a trabalhar na sala de aula devem proporcionar o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Como refere Silvestre (2013), este envolve três aspectos:

(i) A capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade directa de situações que não o têm;

(ii) A compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais,

(iii) A capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afectado pelo contexto, os dados e a estrutura numérica, as grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões).

Relações que não são de proporcionalidade directa. Os alunos devem desenvolver a sua capacidade de identificar situações de proporcionalidade directa e situações em que não existe proporcionalidade directa. É importante que os alunos sejam colocados perante situações que possam sugerir a existência de uma relação de proporcionalidade directa mas tal não acontece, como é o caso do exemplo seguinte.

Problema da roupa a secar. Uma toalha demora 20 minutos a secar. Quanto tempo demoram três toalhas iguais, colocadas a secar em simultâneo?

O problema da roupa a secar é um exemplo de uma situação em que não existe relação de proporcionalidade directa entre as duas variáveis do problema, ou seja, o número de toalhas não está relacionado de forma proporcional com o tempo de secagem. As três toalhas, sendo colocadas em simultâneo, podem demorar tanto tempo a secar como apenas uma. Nesta situação os alunos poderiam, erradamente, estabelecer uma relação de proporcionalidade e indicar que as três toalhas demorariam 60 minutos a secar.

Existem também situações que têm subjacente uma relação de proporcionalidade inversa mas os alunos podem, erradamente, indicar a existência de uma relação de proporcionalidade directa (adaptado de Ponte *et al*., 2010).

> **Pintar o muro.** "O Hugo sozinho pinta um muro em 2 dias. Se tiver a ajuda de 3 amigos, quantos dias vão os 4 rapazes demorar a pintar esse muro?"

Se os alunos interpretarem a situação como sendo de proporcionalidade directa, tenderão a dizer que os quatro rapazes vão demorar oito dias a pintar o muro. Contudo, o facto de existirem mais pessoas a pintar o muro vai reduzir o tempo que este demora a ser pintado. Se todos os rapazes pintarem do mesmo modo que o Hugo, o muro ficará pintado em apenas meio dia. O esquema da Figura 68 pode ajudar os alunos a compreender melhor a situação:

manhã	tarde	manhã	tarde
1.º dia	1.º dia	2.º dia	2.º dia

Muro pintado apenas pelo Hugo em dois dias

manhã	manhã	manhã	manhã
Hugo	A1	A2	A3

Muro pintado pelo Hugo, o amigo 1, o amigo 2 e o amigo 3 em meio dia

Figura 68. Esquema do muro do Hugo

Natureza multiplicativa das relações de proporcionalidade directa. Vamos usar uma tarefa do manual da 6.ª classe (p. 67) para esclarecer a natureza multiplicativa das relações de proporcionalidade directa:

> O Sr. João pôs 15 litros de gasóleo na carrinha e pagou 300 000 Dbs. Se ele enchesse o depósito de gasóleo, que leva 90 litros, quanto pagaria?

As transformações multiplicativas (multiplicação ou divisão) que se operam dentro dos valores numéricos das duas grandezas mantêm uma relação de proporcionalidade directa. A tabela da Figura 69 representa a relação entre as duas grandezas, o número de litros de gasóleo e o valor a pagar. Nesta situação, se enchesse 6 vezes mais o depósito, pagaria seis vezes mais:

	N.º de litros de gasóleo	Valor a pagar (Dbs)	
x 6	15	300 000	x 6
	90	1 800 000	

Figura 69. Transformação dentro dos valores das grandezas

Também as transformações multiplicativas que se operam entre os valores numéricos das duas grandezas, quando relacionamos o valor de uma grandeza com o valor correspondente da outra grandeza, mantêm uma relação proporcional entre os valores numéricos. Nesta situação surge a determinação do valor unitário, ou seja, do valor a pagar por litro de gasóleo. Neste caso, faz-se 300 000 : 15 = 20 000. O valor a pagar por litro de gasóleo é 20 000 Dbs. Para saber o valor de cada litro de gasóleo, calculou-se a razão entre os valores correspondentes de uma e outra grandeza. Para calcular o valor a pagar sendo dado o número de litros, neste caso 90 litros, faz-se 90 x 20 000 = 1 800 000 (Figura 70).

N.º de litros de gasóleo		Valor a pagar (Dbs)
15	x 20 000	300 000
90	x 20 000	1 800 000

Figura 70. Transformação dentro dos valores das grandezas

Colocando outra pergunta: "Se o Sr. João pagar 1 200 000 dobras, quantos litros de gasóleo meteu no depósito?". Neste caso é dado o valor pago e pretende-se saber a quantos litros corresponde. Faz-se a operação inversa, ou seja, 1 200 000 : 20 000 = 60. Assim, o Sr. João meteu 60 litros de gasóleo na carrinha.

Razão é o quociente entre dois valores correspondentes de duas grandezas que se relacionam. Vamos analisar algumas situações para verificar se existe uma relação de proporcionalidade directa entre as grandezas. Para tal, pode calcular-se a razão entre os valores correspondentes. Se essa razão for constante, então estaremos perante uma relação de proporcionalidade directa, como acontece no exemplo da Figura 71.

N.º de sacos	3	5	10
Custo em Dobras	4 500	7 500	15 000

Cálculo das razões:

$\frac{4500}{3}=1500$ $\frac{7500}{5}=1500$ $\frac{15000}{10}=1500$

Figura 71. Relação entre o número de sacos de pastilhas e o seu custo (manual de 6.ª classe, p. 65).

Concluímos que a relação entre o número de sacos de pastilhas e o seu custo é uma relação de proporcionalidade directa. Duas grandezas dizem-se **directamente proporcionais** quando o quociente entre os valores correspondentes de uma grandeza e da outra é constante. A esse valor constante chama-se **constante de proporcionalidade**.

Nesta situação podemos estabelecer as igualdades seguintes, a que chamamos proporções:

$$\frac{4500}{3}=\frac{7500}{5} \qquad \frac{7500}{5}=\frac{15000}{10} \qquad \frac{4500}{3}=\frac{15000}{510}$$

Uma **proporção** é uma igualdade entre duas razões.

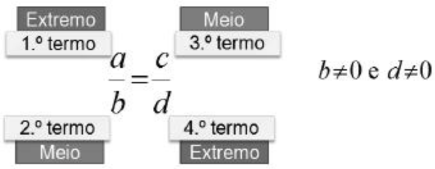


Figura 72. Proporção

Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. A esta igualdade chama-se **propriedade fundamental das proporções**: $a \times d = b \times c$.

Analisemos agora uma outra situação:

N.º de sacos de amêndoas	1	2	3	4	5
Custo em Dobras	14 000	26 000	40 000	54 000	73 000

Cálculo das razões:

$$\frac{14000}{1}=1400 \qquad \frac{26000}{2}=13000 \qquad \frac{40000}{3}=13333,(3)$$

$$\frac{54000}{4}=13500 \qquad \frac{73000}{5}=14600$$

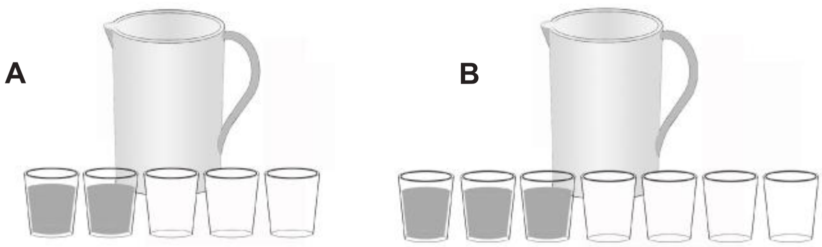
Figura 73. Relação entre número de sacos de amêndoas e o seu custo (manual de 6.ª classe, p. 66)

Neste caso, como as razões não são iguais o número de sacos de amêndoa e o seu custo não são directamente proporcionais.

- **problemas de proporcionalidade directa**. Existem diversos tipos de problemas com contextos diversificados que envolvem relações de proporcionalidade directa, como sendo:
- **problemas de valor omisso**: São dados três dos valores que compõem uma proporção e é pedido o quarto;
- **problemas de comparação**: São dadas duas razões e pede-se para indicar qual é maior, menor ou se são iguais;
- **problemas de conversão entre representações**: A partir dos dados representados num determinado sistema, pede-se a sua representação noutro sistema mantendo a mesma relação entre si. (Ponte *et al*., 2010)

Analisemos um exemplo de um problema de comparação de razões:

A mãe da Anabela está a preparar um jarro de sumo de laranja (Jarro A) em que dilui 2 copos de concentrado em 3 copos de água. A mãe da Beatriz também está a preparar um jarro de sumo de laranja (Jarro B) mas dilui 3 copos de concentrado em 4 copos de água. Qual dos sumos sabe mais a laranja? Explique a sua resposta.



Nesta situação, temos a razão entre a quantidade de concentrado e a quantidade de água. É necessário saber se elas são ou não iguais e, caso não o sejam, decidir em qual dos jarros o sumo tem um sabor a laranja mais intenso.

As situações de ampliação e redução de figuras, de cálculo de percentagens e de escalas, por exemplo, são contextos de proporcionalidade directa que podem ser propostos aos alunos em diversos problemas. Uma percentagem é uma razão cujo consequente é 100. Uma escala é a razão entre a dimensão no desenho e a respectiva dimensão na realidade. Nos problemas que envolvem percentagens ou escalas mantém-se a natureza multiplicativa dos problemas de proporcionalidade, pelo que se pode estabelecer relações dentro dos valores da mesma grandeza ou relações entre os valores de uma grandeza e os correspondentes de outra.

Além do tipo de problema e dos seus contextos, o professor também deve ter em conta as diferentes representações que podem ser usadas numa situação de proporcionalidade directa, nomeadamente texto, gráficos, tabelas e razões.

Actividade 5.5. A

1. Em pequenos grupos, os formandos formulam um problema que envolva uma relação que não seja de proporcionalidade directa. Resolvem-no e discutem que interpretações os alunos podem fazer e que erros podem cometer ao resolver esse problema.

2. Os vários grupos partilham entre si os problemas formulados e as respectivas resoluções.

3. Os professores podem posteriormente propor um dos problemas criados à sua turma e levar para o grupo de formação as resoluções dos alunos e as ideias que foram discutidas na aula. O grupo pode partilhar as suas experiências e discutir o desempenho dos seus alunos, aspectos que foram positivos na sua prática e possíveis situações da aula que poderiam decorrer de outro modo.

Actividade 5.5. B

Considere o seguinte problema de valor omisso:

Três quilos de amêndoa custam 22 500 dobras. Quantos quilos posso comprar com 90 000 dobras?

1. Analise as várias respostas possíveis dos alunos e explique que relações e que representações estão os alunos a usar:

(A)

	N.º de quilos de amêndoa	Valor a pagar (Dbs)	
× 4×	3	22 500	× 4×
	?	90 000	

(B)

N.º de quilos de amêndoa		Valor a pagar (Dbs)
3	x 7 500	22 500
?	x 7 500	90 000

R: Descobri que cada quilo custa 7 500 Dobras (22 500 : 3). Faço 90 000 : 7500 = 12 e sei que posso comprar 12 quilos de amêndoa.

(C)

$$\frac{3}{22500} = \frac{?}{90000}$$
$$3 \times 90000 = 22500 \times a$$
$$270000 = 22500 \times a$$
$$a = 270000 : 22500$$
$$a = 12$$

R: Posso comprar 12 quilos de amêndoa.

(D)

Quantidade de amêndoa (quilos)	3	6	9	12
Valor a pagar (Dbs)	22 500	45 000	67 500	90 000

R: Posso comprar 12 quilos de amêndoa.

2. No grupo de formação, discutam o modo como os vossos alunos resolvem este tipo de situações e confronte essas resoluções com as aqui exemplificadas.

Actividade 5.5. C

Considere o seguinte problema do manual da 6.ª classe (p. 73):

1. Planifiquem a resolução desta tarefa na sala de aula, indicando os objectivos de aprendizagem e contemplando os vários momentos (introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e momento de discussão colectiva em que os alunos partilham as suas resoluções). Nessa planificação antecipem as resoluções que os alunos podem fazer, as resoluções que serão seleccionadas para ser apresentadas à turma e as relações que podem ser analisadas durante essa discussão.

Actividade 5.5. D

Considere o seguinte problema proposto a uma turma de 6.ª classe.

Símbolos nacionais

1. A Bandeira Nacional é constituída por três barras dispostas horizontalmente, sendo verdes e de igual largura as dos extremos, e a mediana, na qual estão apostas duas estrelas negras de cinco pontas, amarela, uma vez e meia mais larga do que cada uma das outras, e por um triângulo encarnado, cuja base se situa do lado esquerdo da bandeira. A altura do triângulo é metade da base.

(Consultado de http://www.parlamento.st/constituicao.htm)

O João e a Maria desenharam as três barras horizontais da Bandeira Nacional. Qual dos dois alunos fez o desenho correcto dessas barras?

Desenho do João

Desenho da Maria

1. Com base na descrição dos três tipos de problemas de proporcionalidade directa que são apresentados em cima, indiquem de que tipo de problema se trata.

2. Identifiquem diferentes estratégias de resolução que os alunos podem usar para responder à questão.

6. Reflexão final: perfis do formador e do formando

Esta formação contempla simultaneamente o aprofundamento do conhecimento do conteúdo matemático e do conhecimento da didáctica da matemática no âmbito da prática lectiva dos professores das diversas classes (da 1.ª à 6.ª classes). Esta formação permite o desenvolvimento profissional dos professores, proporcionando-lhes a análise, a discussão e a reflexão sobre o trabalho que se desenvolve no âmbito do ensino-aprendizagem da Matemática nessas classes. Esta formação assenta em tópicos matemáticos do programa, pelo que o trabalho desta formação fomenta também o desenvolvimento do conhecimento curricular.

Os professores devem, nesta formação, ser capazes de mobilizar os seus conhecimentos matemáticos e didácticos para realizar uma adequada análise dos documentos curriculares de modo a serem capazes de fazer a gestão curricular de acordo com os seus alunos e o contexto em que estão inseridos.

Nesta formação, a experiência dos professores e as suas práticas lectivas devem constituir os pontos de partida da formação. Além disso, esta formação deve procurar atender às necessidades concretas dos professores no âmbito das suas práticas, aprofundando o seu conhecimento e perspectivando boas práticas que visem uma melhoria nas aprendizagens dos seus alunos.

A **dinâmica da formação** deve valorizar as dinâmicas colaborativas entre os professores, envolvendo:

- a realização de propostas de trabalho de natureza diversificada, individual e colaborativa nas sessões de formação;
- a elaboração de planos de aula e conjuntos de aulas, construindo tarefas de natureza matemática para implementação em sala de aula para dados objectivos, perspectivando os vários momentos da aula, o trabalho do professor, o trabalho dos alunos, os materiais necessários e a avaliação a realizar;
- a análise de situações de sala de aula, a discussão e a reflexão sobre o trabalho desenvolvido pelas crianças (estratégias, conhecimentos e raciocínios matemáticos, dificuldades) e sobre a prática de sala de aula (comunicação promovida, gestão dos diversos momentos da aula);
- a utilização e a construção de materiais manipuláveis para a resolução de problemas e o desenvolvimento de capacidades dos alunos;
- a realização de trabalhos individuais e de grupo com apresentação e discussão o grupo de formação.

Uma vertente bastante significativa desta formação refere-se ao desenvolvimento da capacidade dos formandos para analisar e reflectir sobre a forma como os alunos aprendem e desenvolvem capacidades em Matemática. Esta formação permite discutir aspectos centrais da prática de sala de aula e os conhecimentos e as capacidades que o professor deve promover nos alunos. Uma outra vertente é a capacidade de planificar e analisar sequências de tarefas para desenvolver dados objectivos de aprendizagem e preparar planos de aula, antecipando abordagens de sala de aula, dificuldades e estratégias dos alunos.

Assim, no final da formação contínua, o **formando deve ter desenvolvido competências gerais** que lhe permitam:

- reconhecer a importância da actualização contínua de conhecimentos para a melhoria das aprendizagens dos alunos;
- identificar-se como parte integrante do sistema educativo, a fim de contribuir para o seu sucesso;
- planificar e avaliar situações de ensino-aprendizagem significativas para os alunos;
- enquadrar a concepção e o planeamento da acção pedagógica no processo de gestão curricular;
- trabalhar em equipa com os seus pares;

- liderar equipas de trabalho;
- desenvolver uma pedagogia contextualizada e funcional que tenha em conta as características dos alunos;
- descrever e analisar situações reais de práticas de ensino.

No âmbito específico da Matemática, o formando deve ser capaz de:

- promover nos alunos o gosto pela matemática, propiciando a articulação entre a matemática, outros domínios do saber e situações do dia-a-dia;
- implicar os alunos na construção do seu próprio conhecimento matemático, mobilizando conhecimentos relativos ao modo como as crianças aprendem matemática e aos contextos em que ocorrem essas aprendizagens;
- proporcionar experiências matemáticas diversificadas aos alunos, utilizando materiais manipuláveis e recursos adequados;
- promover nos alunos a autoconfiança na sua capacidade de trabalhar com a matemática;
- incentivar os alunos a resolverem problemas e a explicitarem os processos de raciocínio, comparando com a realização dos outros;
- desenvolver nos alunos a capacidade de identificar, definir e discutir conceitos e procedimentos, bem como de aprofundar a compreensão de conexões entre eles e entre a Matemática e as outras áreas curriculares;
- promover nos alunos a compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos implicados no currículo, designadamente na compreensão e na representação dos números e das operações, na compreensão do processo de medição e dos sistemas de medida, no conhecimento de formas geométricas, na recolha e na organização de dados e na identificação de padrões e regularidades.

O **formador** responsável pela formação contínua em Matemática **deve estar capacitado para**:

- analisar os comportamentos e os discursos produzidos pelos indivíduos em formação contínua, nomeadamente as suas práticas e decisões pedagógicas, a partir do estudo de situações reais no contexto escolar, fundamentando-se em processos de diagnóstico, recolha, análise, reflexão, explicitação, estruturação e comunicação dos dados recolhidos e situações vividas que permitam a mudança e a melhoria efectiva das práticas dos docentes envolvidos e a (re)construção do conhecimento profissional dos professores;
- construir uma relação de formação centrada na colaboração, no apoio e no aconselhamento tendo em vista o desenvolvimento de práticas lectivas adequadas;
- encorajar, observar, ouvir, apoiar, reflectir, analisar, organizar e ser flexível e acessível;
- identificar abordagens de ensino dos professores de Matemática e sugerir as mudanças necessárias para a promoção de um melhor processo de ensino-aprendizagem nesta área;
- promover a construção de projectos educativos e curriculares como forma de consolidar a organização e a autonomia dos formandos.

Bibliografia e recursos digitais

Bibliografia

Abrantes, P. (1985). *Planificação no Ensino da Matemática*. [Texto de apoio à disciplina de Metodologia da Matemática da FCUL].

Abrantes, P.; Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: Ministério da Educação. [Disponível em http://pt.scribd.com/doc/58857616/Matematica-na-Educacao-Basica-A-Paulo-Abrantes-Lurdes-Serrazina-Isolina-Oliveira].

Associação de Professores de Matemática (APM) (1988). *Renovação do Currículo de Matemática.* Lisboa: APM.

Boavida, A.; Paiva, A.; Cebola, G.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC. [Disponível em http://comum.rcaap.pt/bitstream/123456789/5566/1/A_experiencia_matematica_no_ens_basico.pdf].

Brocardo, J. & Serrazina, L. (Eds.) (2008). *O Sentido do Número: Reflexões Que Entrecruzam Teoria e Prática*. Colecção Educação. Lisboa: Escolar Editora.

Canavarro, A. P. (2011). *Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e Desafios.* Educação e Matemática, 115, 11-17.

Carvalho, A. & Gonçalves, H. (2003). "Multiplicação e divisão: conceitos em construção". *Educação e Matemática*, 75, 23-25.

Castro, J. & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de Número e Organização de Dados – Textos de Apoio para Educadores de Infância.* Lisboa: Ministério da Educação.

Cruz, G. & Martinón, A. (1998). "Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa". *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 16, 85 -100 (documento PDF, 1-13) [Disponível em http://jagcruz.webs.ull.es/Articulos/Uno_1998.pdf].

Fonseca, L. (2004). "Geometria no plano". *In* P. Palhares (Coord.), *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico* (pp. 251-302). Lisboa: Lidel.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no Ensino-Aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.º Ciclo do Ensino Básico* (Tese de Doutoramento). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Hernandéz, F. (2000). *Cultura Visual, Mudança Educativa e Projecto de Trabalho*. Porto Alegre: Art-med.

Huinker, D. (2002). "Examining dimensions of fraction operation sense". *NCTM Yearbook: Making Sense of Fractions, Ratio and Proportion.* N-J: NCTM.

Kantowski, M.(1997). "Algumas considerações sobre o ensino para a resolução de problemas". *In*: Krulik, S. & Reys, R.E. *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar* (pp. 270 -282). São Paulo: Atual.

Martins, M. E. & Ponte, J. P. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: Ministério da Educação/Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (disponível em https://docs.google.com)

Monteiro, C. & Costa, C. (1996). *Dificuldades na Aprendizagem dos Números Racionais*. Educação e Matemática, 40, 60-63.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática* (tradução). Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (tradução). Lisboa: APM.

Palhares, P. (2004). (Org.). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Palhares, P., Gomes, A. & Amaral, E. (2011) (Coords.). *Complementos de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Lidel.

Polya, G. (1945). *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). "Gestão curricular em Matemática". *In* GTI (Ed.), *O Professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (Org.) (2014). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (*e-book* disponível em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/15310/1/P3M.pdf).

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Branco, N. (2012). "Práticas Profissionais dos Professores de Matemática"*. Avances en Investigación en Educación Matemática*, 1, 65-86.

Ponte. J. P.; Silvestre, A. I.; Garcia, C. & Costa, S. (2010). *O Desenvolvimento do Conceito de Proporcionalidade Directa pela Exploração de Regularidades.* [Disponível em http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf].

Rafael, I. (2011). "Origami". *Educação e Matemática*, 114, 16-22. [Disponível em http://www.apm.pt/files/_EM114_pp16-22_4e6489d4d25fc.pdf].

Rodrigues, M. (2010). "O Processo de demonstrar na aula de Matemática: um olhar sobre a comunicação emergente"*. In* L. Santos, *et al.* (Orgs.) *Investigação em Educação Matemática: Comunicação no Ensino e na Aprendizagem da Matemática* (pp. 24-50). Lisboa: FCTUNL. [Disponível em http://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/1155/4/O%20processo%20de%20demonstrar.pdf].

Roldão, M. C. (2009). *Estratégias de Ensino: O Saber e o Agir do Professor.* Vila Nova de Gaia. Fundação Manuel Leão.

Schon, D. (1983). *The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action.* London: Temple Smith.

Silvestre, A. I. (2013). "Desenvolver o raciocínio proporcional – Contributo de uma abordagem de ensino exploratória"*. In* J. A. Fernandes; M. H. Martinho; J. Tinoco, & F. Viseu (Orgs.). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. [Disponível em http://www.apm.pt/files/_2Silvestre_5281a3ae1d3f1.pdf].

Treffers, A. & Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3): "Calculation up to 100". *In* M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment (Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (pp. 61-88). Utrecht: Freudenthal Institute.

Turkel, S. & Newman, C. M. (1993). "Qual é o teu número? Desenvolvendo o sentido de número"*. Educação e Matemática*, 25, 31-33.

Van de Walle, J. (2003). *Elementary & Middle School Mathematics.* Boston, MA: Pearson.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas Actuais – materiais para Professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Curricular.

Recursos digitais

Software de geometria dinâmica (Ex. GeoGebra http://www.geogebra.org/cms/en/)

Actividades e recursos da Associação de Professores de Matemática (Portugal), http://www.apm.pt/portal/index.php?id=26373

ALEA, http://www.alea.pt/

Atractor – Matemática Interactiva, http://www.atractor.pt/

Banco de itens, http://bi.gave.min-edu.pt/bi/

Exames e provas, http://bi.gave.min-edu.pt/exames/

Illuminations – NCTM, http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx

KidsKout, http://www.fi.uu.nl/rekenweb/

National Library of Virtual Manipulatives (Applets), http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

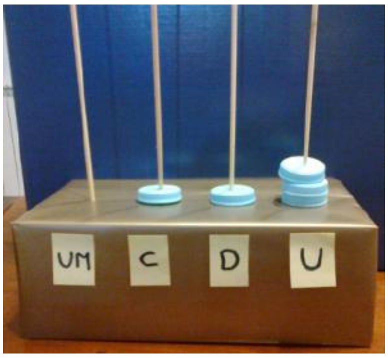
Mathematics for Elementary Teachers, http://highered.mcgraw-hill.com/sites/0073519456/student_view0/

Materiais didácticos

Diversos materiais didácticos podem ser construídos com materiais do dia-a-dia.

Ábaco

Caixa, paus e tampas

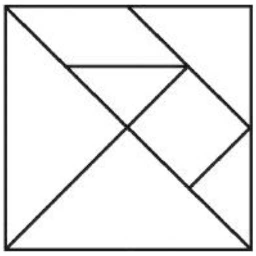


Cuisenaire

Paus pintados: 10 cm – cor de laranja; 9 cm – azul escuro; 8 cm – castanho; 7 cm - preto; 6 cm – verde escuro; 5 cm – amarelo; 4 cm – lilás; 3 cm – verde; 2 cm – vermelho; 1 cm – branco

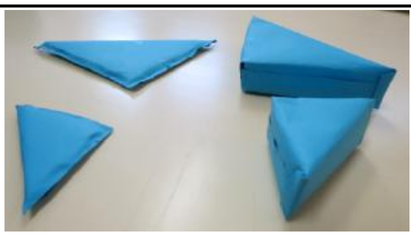
Tangram

Papel dividido em sete partes, como mostra o esquema, que depois são recortadas para os alunos fazerem novas figuras com as peças (dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo não rectângulo)




Blocos lógicos (cartão ou esferovite – diferentes espessuras)

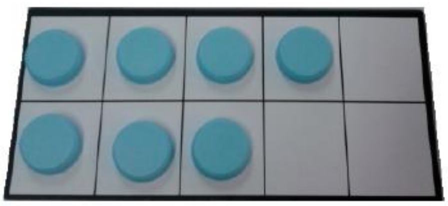
Contém 48 peças divididas em três cores (amarelo, azul e vermelho), quatro formas (círculo, quadrado, triângulo e rectângulo), dois tamanhos (grande e pequeno) e duas espessuras (fino e grosso).



Triângulos azuis (pequeno grosso e fino, grande grosso e fino)

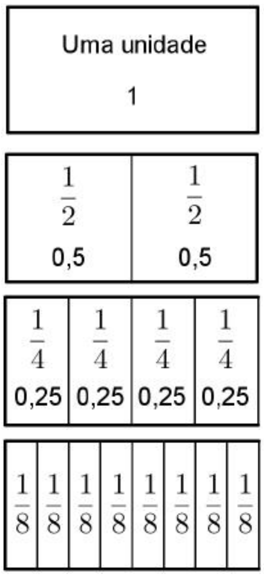
Moldura de dez

Folha de papel com a moldura de 10 (Anexo 6) e tampas ou pedras (neste exemplo representam o número 7, podendo identificar-se as realções: 7 = 4 + 3; 7 = 2 + 2+ 2+ 1; 7 = 10 – 3



Muro das fracções

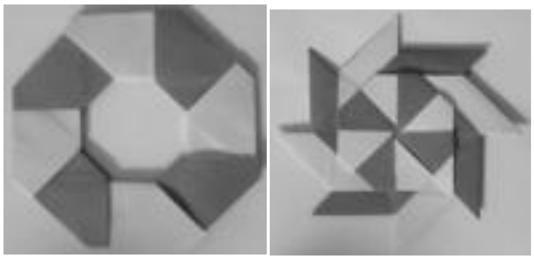
A tira de papel representa a unidade. Existem várias unidades (tiras de papel iguais) divididas em partes iguais: uma tira dividida em duas partes iguais, uma tira dividida em quatro partes iguais e uma tira dividida em oito partes iguais.



Exemplos de origamis

Estrela octogonal

(Instruções de construção em http://www.origami-instructions.com/modular-origami-pinwheel.html)

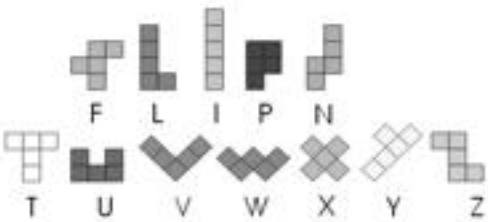


Cubo

(Instruções de construção em http://mathcraft.wonderhowto.com/how-to/modular-origami-make-cube-octahedron-icosahedron-from-sonobe-units-0131460/)

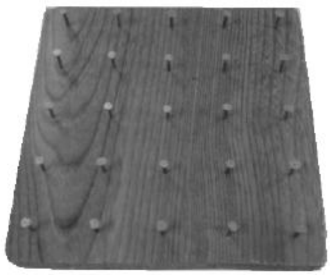
Pentaminós

Peças com 5 quadrados como mostra a figura – existem 12.



Geoplano de madeira e pregos

Por exemplo com 25 pregos – 5 por 5



Exemplos de materiais de apoio para a aprendizagem da Matemática

Temas/tópicos	Material não estruturado	Material estruturado
Material para todos os temas	O próprio aluno e o seu corpo são o primeiro e mais importante "material" para a aprendizagem da Matemática, tanto para as primeiras contagens e operações como para a definição das relações no espaço e até para a avaliação de grandezas e medidas.	
Material para a contagem e as operações	— Os próprios alunos; — Caricas, cápsulas de garrafas, rolhas; — Sementes, frutos, folhas; — Pedras; — Paus, fósforos, palhinhas — Pregos; — Latas, garrafas; — Etc.	— Ábaco; — Material *cuisenaire*; — Material multibásico; — Blocos lógicos; — Etc.
Material para a geometria	— Mobiliário e equipamento da sala de aula (mesas, cadeiras, quadro…); — Elementos do ambiente natural (árvores, troncos, ramos, etc); — Caixas; — Latas; — Rolhas; — Arame, pregos; — Palhinhas; — Elásticos; — Etc.	— Tangram; — Geoplano; — Blocos lógicos; — Modelos de sólidos geomé-tricos; — Modelos de figuras planas; — Réguas e esquadros; — Compasso; — Etc.
Material para a medida	— Garrafas, latas, copos; — Vasilhas de vários tipos; — Água, areia, sementes; — Cordas; — Paus; —Etc.	Instrumentos de medida: — Balanças de vários tipos; — Réguas, fitas métricas; — Vasilhas graduadas; — Etc.
Todos os temas	O recurso aos jogos tradicionais da comunidade pode não só ser um auxiliar precioso na construção dos conceitos matemáticos, como também um elemento fundamental de motivação para os alunos.	— Cartas; — Jogo tipo "Glória"; — Damas, xadrez; — Etc.

Retirado de Programa de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico Anotado, Porto Editora

ANEXOS

Anexo 1 – Modelo de formação: estrutura do curso

O curso de formação organizado a partir deste guia, é constituído por dez módulos, num total de 30 horas de duração de acordo com os principais conceitos abordados nos capítulos da publicação. Sugerimos que para cada módulo sejam usadas as sugestões de actividades, os exemplos e os textos de apoio apresentados no guia.

MÓDULO 1 – A AULA DE MATEMÁTICA E A EXPERIÊNCIA MATEMÁTICA

Objectivos

- Fundamentar a importância do desenvolvimento das capacidades transversais em Matemática para o sucesso das aprendizagens dos alunos.
- Desenvolver competências no âmbito da selecção de dinâmicas, tarefas e materiais conducentes a experiências de aprendizagem significativas.
- Reconhecer a importância da transversalidade da resolução de problemas como forma de estabelecer conexões.
- Promover a comunicação matemática em sala de aula.

MÓDULO 2 – PLANIFICAÇÃO E AVALIAÇÃO EM MATEMÁTICA

Objectivos

- Fundamentar a importância da gestão curricular para o sucesso das aprendizagens dos alunos.
- Reconhecer o papel do professor enquanto gestor curricular e elemento de uma comunidade.
- Desenvolver competências no âmbito da planificação do ensino-aprendizagem.
- Desenvolver competências no âmbito da avaliação das aprendizagens e do processo educativo.
- Analisar a organização dos espaços e materiais, do tempo e do grupo de alunos.

MÓDULO 3 – NÚMEROS E OPERAÇÕES: SENTIDO DE NÚMERO

Objectivos

- Conhecer conceitos essenciais do sentido de número.
- Compreender os algoritmos das várias operações.
- Relacionar as diferentes representações do número.
- Conhecer tarefas e materiais que poderão promover o desenvolvimento do cálculo mental.

MÓDULO 4 – NÚMEROS E OPERAÇÕES: OS RACIONAIS

Objectivos

- Compreender as diferentes concepções de número racional.
- Relacionar as diferentes representações do número racional (decimal e fraccionária).
- Conhecer tarefas e materiais que poderão promover o desenvolvimento do conhecimento dos números racionais e do efeito das operações sobre estes.

MÓDULO 5 – GEOMETRIA: VISUALIZAÇÃO E FIGURAS

Objectivos

- Conhecer conceitos essenciais do sentido espacial.
- Reconhecer figuras geométricas no plano e no espaço e classificá-las.
- Representar, descrever e construir figuras no plano e no espaço e identificar as suas propriedades.
- Conhecer tarefas e materiais que poderão promover o desenvolvimento da visualização, a compreensão das propriedades das figuras e a sua classificação.

MÓDULO 6 – GEOMETRIA: RECTAS, ÂNGULOS E SIMETRIA

Objectivos

- Compreender a noção de ângulo e a sua medição.
- Reconhecer simetria de reflexão em figuras e realizar reflexões de figuras dado um eixo.
- Realizar frisos, identificar simetrias em frisos e realizar pavimentações com polígonos.
- Conhecer tarefas e materiais que poderão promover a compreensão de figuras, das suas propriedades e de transformações geométricas.

MÓDULO 7 – MEDIDA: GRANDEZAS, MEDIR E ESTIMAR

Objectivos

- Desenvolver a compreensão do conceito de grandeza.
- Analisar a utilização de unidades de medida convencionais e não convencionais para o desenvolvimento do conceito de medição.
- Realizar medições e estimativas.
- Conhecer tarefas e materiais que poderão promover a compreensão das grandezas e do processo de medição.

MÓDULO 8 – MEDIDA: ESTUDO DAS GRANDEZAS

Objectivos

- Compreender as diversas grandezas.
- Realizar diferentes experiências relacionadas com as diferentes grandezas.
- Conhecer tarefas e materiais que poderão promover a compreensão das diversas grandezas.

MÓDULO 9 – ESTATÍSTICA

Objectivos

- Promover a compreensão do que envolve uma investigação estatística.
- Esclarecer conceitos fundamentais como a classificação de variáveis e aprofundar o conhecimento relativamente à interpretação e à representação de gráficos e tabelas e à determinação da moda e da média.
- Analisar resoluções de alunos e identificar possíveis dificuldades e erros.
- Perspectivar o trabalho do professor no sentido de proporcionar aos alunos esta experiência matemática em sala de aula.

MÓDULO 10 – PROPORCIONALIDADE

Objectivos

- Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade.
- Distinguir situações em que não existe proporcionalidade directa de situações em que existe.
- Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade directa.
- Analisar resoluções de alunos e identificar possíveis dificuldades.

De seguida apresenta-se um exemplo de ficha de avaliação (uma para o formando e outra para o formador) que poderá ser usado para cada módulo. Os campos 2, 4, 5 e 6 são comuns a todos os módulos, sendo o campo 3 específico de cada módulo. Logo a seguir ao modelo geral, é apresentado este campo 3 com a referência a cada um dos módulos do curso de formação. Nestas fichas de avaliação é sempre utilizada a mesma escala em todos os itens.

MODELOS DE FICHAS DE AVALIAÇÃO

FICHA DE AVALIAÇÃO DO MÓDULO (Para o formador)

1. Identificação do Módulo: ____

Data: ______ /______ / ____________

Na sua avaliação utilize a seguinte escala.

1	2	3	4
Insuficiente	Suficiente	Bom	Muito Bom

2. Avaliação geral

A duração do módulo, relativamente ao seu conteúdo, foi adequada.				
A metodologia foi adequada aos participantes.				
Os objectivos do módulo foram claros.				
O módulo encontrava-se bem estruturado.				
Os conteúdos do módulo foram aprofundados.				
Os textos de apoio foram adequados.				
A formação foi orientada para a promoção da partilha e do trabalho colaborativo.				
Os trabalhos práticos propostos apresentaram coerência.				
A formação incentivou a autoformação.				
O módulo evidenciou equilíbrio entre teoria e prática.				
O conteúdo foi adequado às funções que os formandos desempenham.				
As competências adquiridas vão ter impacto nas funções que os formandos desempenham.				

3. Avaliação específica (indique o grau de importância que atribuiu a cada um dos conteúdos do módulo)

Nota: *Conferir de seguida os quadros específicos relativos à avaliação de cada módulo.*				

4. Avaliação do documento de apoio

Os conteúdos são apresentados de forma clara.				
A informação teórica é suficiente.				
Os exemplos práticos foram suficientes, trabalhados e adaptados à realidade de São Tomé e Príncipe.				
Os exercícios são importantes e ajudam a complementar a aprendizagem.				

5. Indique:

5.1. Aspectos mais positivos relativamente à forma como o módulo foi trabalhado.

____

5.2. Aspectos mais negativos relativamente à forma como o módulo foi trabalhado.

____

6. Indique sugestões que considere relevantes em relação à forma como o módulo deve ser trabalhado na formação.

____

FICHA DE AVALIAÇÃO DO MÓDULO (Para o formando)

1. Identificação do Módulo: ____

Data: ______ /______ / ____________

Na sua avaliação utilize a seguinte escala.

1	2	3	4
Insuficiente	Suficiente	Bom	Muito Bom

2. Avaliação geral

A duração do módulo, relativamente ao seu conteúdo, foi adequada.				
A metodologia foi adequada aos participantes.				
Os objectivos do módulo foram claros.				
O módulo encontrava-se bem estruturado.				
Os conteúdos do módulo foram aprofundados.				
Os textos de apoio foram adequados.				
A formação foi orientada para a promoção da partilha e do trabalho colaborativo.				
Os trabalhos práticos propostos apresentaram coerência.				
A formação incentivou a autoformação.				
O módulo evidenciou equilíbrio entre teoria e prática.				
O conteúdo foi adequado às funções que desempenha.				
As competências adquiridas vão ter impacto nas funções que desempenha.				

3. Avaliação específica (indique o grau de importância que atribuiu a cada um dos conteúdos do módulo)

Nota: *Conferir de seguida os quadros específicos relativos à avaliação de cada módulo.*				

4. Avaliação do documento de apoio

Os conteúdos são apresentados de forma clara.				
A informação teórica é suficiente.				
Os exemplos práticos foram suficientes, trabalhados e adaptados à realidade de São Tomé e Príncipe.				
Os exercícios são importantes e ajudam a complementar a aprendizagem.				

5. Indique:

5.1. Aspectos mais positivos relativamente à forma como o módulo foi trabalhado.

____

5.2. Aspectos mais negativos relativamente à forma como o módulo foi trabalhado.

____

6. Indique sugestões que considere relevantes em relação à forma como o módulo deve ser trabalhado na formação.

____

MODELOS DE AVALIAÇÃO DO CAMPO 3 DE CADA MÓDULO

Módulo 1 – A aula de Matemática e a experiência matemática

Conceitos teóricos				
Finalidades da Matemática				
A aula de Matemática: dinâmicas e momentos				
A experiência matemática: tarefas, materiais e representações				
Resolução de problemas				
Comunicação matemática: argumentação, justificação matemáticas e raciocínio				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 2 – Planificação e avaliação em Matemática

Conceitos teóricos				
O papel do professor na gestão curricular				
O desenvolvimento profissional do professor				
Princípios e orientações da planificação curricular				
Princípios e orientações da avaliação curricular				
Princípios e orientações da organização do ambiente educativo				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 3 – Números e operações: sentido de número

Conceitos teóricos				
O desenvolvimento do sentido de número				
Cálculo mental				
Sentido de operação				
Relações numéricas				
Sistema de numeração decimal posicional				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 4 – Números e operações: os racionais

Conceitos teóricos				
As diferentes concepções dos números racionais				
As dificuldades de representação fraccionária				
As dificuldades de representação decimal				
O modelo de recta para os inteiros relativos				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 5 – Geometria: visualização e figura

Conceitos teóricos – Teoria de Van Hiele para a aprendizagem da geometria				
Visualização espacial				
Relações espaciais				
Figuras no plano				
Sólidos geométricos				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 6 – Geometria: rectas, ângulos e simetria

Rectas, semi-rectas e segmentos de recta				
Ângulos e sua amplitude				
Simetria				
Frisos				
Pavimentações				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 7 – Medida: grandezas, medir e estimar

Conceitos teóricos para o ensino-aprendizagem da medida				
Conceito de grandeza				
Processo de medição				
Estimação				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 8 – Medida: estudo das grandezas

Comprimento				
Área				
Volume				
Capacidade				
Dinheiro				
Tempo				
Massa				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 9 – Estatística

Investigação estatística e variáveis				
Recolha, organização e interpretação de dados				
Gráfico de barras				
Moda e média aritmética				
Exemplos práticos apresentados				

Módulo 10 – Proporcionalidade

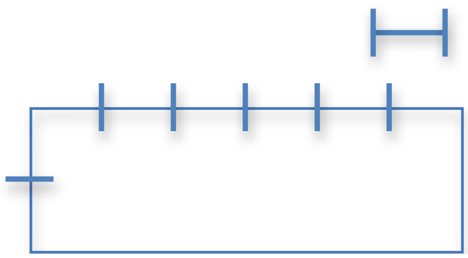
Raciocínio proporcional				
Relações que não são de proporcionalidade directa				
Conceitos específicos				
Problemas de proporcionalidade directa				
Exemplos práticos apresentados				

Anexo 2 – Exemplo de plano de aula

<table>
<tr><td colspan="2">Tema: Grandezas e medida</td></tr>
<tr><td colspan="2">Subtema: Perímetro</td></tr>
<tr><td colspan="2">3.ª classe</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conhecimentos prévios: Pressupõe-se que os alunos já trabalharam, nos anos anteriores, a medição de comprimentos recorrendo a unidades de medida não convencionais.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objectivos: Pretende-se que os alunos no final desta aula sejam capazes de:
• relacionar diferentes unidades de medida durante a medição de comprimentos;
• compreender e determinar o perímetro de figuras.</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento da estratégia
(ensino com carácter expositivo)

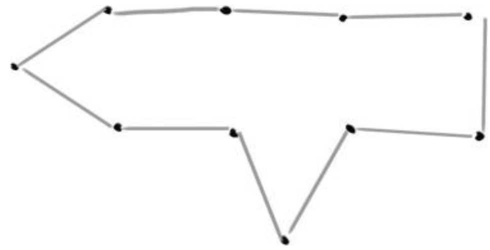
Introdução
O professor inicia a aula com uma conversa inicial com os alunos de modo a identificar os seus conhecimentos prévios.

Desenvolvimento
De seguida apresenta e explica a definição de perímetro e propõe a realização de um conjunto de problemas de aplicação do conceito (fórmula).
Para cada problema proposto, os alunos vão resolver individualmente no seu lugar e depois o professor vai escolher um dos alunos para realizar a correcção no quadro.
Durante a correcção no quadro o professor discute com os alunos as dificuldades que possam ter surgido e o facto de terem surgido diferentes unidades de medida ao longo dos vários problemas.

Exemplo de uma tarefa a propor
Qual o perímetro da figura abaixo, que representa um terreno de forma rectangular, tomando como unidade de medida o segmento de recta representado na figura?
</td><td>Desenvolvimento da estratégia
(ensino com algum carácter exploratório)

Introdução
O professor começa por organizar a turma de modo a que os alunos trabalhem a pares.
De seguida, e para contextualizar a tarefa, propõe aos alunos que meçam o comprimento de vários objectos que estão na sala (e.g. comprimento e altura da secretária, comprimento do lápis) recorrendo a duas unidades de medida diferentes: fósforos e pauzinhos com o dobro do comprimento dos fósforos.
Os alunos deverão ir registando os resultados que vão obtendo.
De seguida o professor lança o seguinte desafio: Construir diferentes figuras (polígonos) com apenas 10 fósforos. Os alunos poderão fazer o registo no papel ponteado ou no seu caderno e discutir com o seu par possíveis descobertas que possam ter realizado.

Trabalho autónomo
O professor vai acompanhando o trabalho dos alunos, garantindo que as figuras construídas são polígonos e colocando questões relativamente à utilização de duas unidades de medida diferentes (e.g. será que se tentassem construir essa figura com os pauzinhos conseguiriam? De quantos pauzinhos necessitariam? Pode ainda, no caso de a mesma figura aparecer em posições diferentes, questionar os alunos sobre esse facto (visualização espacial) ou mesmo desafiá-los a tentarem construir uma figura com forma triangular. Discussão colectiva: pedir a alguns grupos que apresentem as várias figuras construídas. As primeiras produções poderão ser as figuras mais simples, com forma rectangular, e depois outras figuras menos usuais, como é o caso de polígonos não convexos (por exemplo a estrela de cinco pontas). Aproveitar esta discussão para clarificar a questão de os alunos apresentarem a mesma figura mas numa posição diferente, considerando-a como outra figura. Relativamente ao registo no papel, pode-se discutir com os alunos o facto de as diagonais do papel ponteado não terem a mesma</td></tr>
</table>

	medida de comprimento que as "não--diagonais" e que, por isso, algumas figuras que construíram com os fósforos não podem ser representadas no papel ponteado (por exemplo o caso da figura abaixo).  No caso de os alunos apresentarem alguma difi-culdade em compreender a razão para isto acontecer, pode recorrer-se a dobragens de quadrados de papel. **Síntese**: Neste momento os alunos, com a ajuda do professor, deverão definir o conceito de perímetro e perceber que todas as figuras construídas durante esta tarefa tinham o mesmo perímetro.
Recursos Quadro, giz e cadernos	**Recursos** Fósforos, paus de igual tamanho e com o dobro do comprimento dos fósforos. Papel ponteado, quadro, giz, lápis de cor
Avaliação Realização de um problema individual de aplicação do conceito de perímetro	**Avaliação** "Utilizando o papel ponteado, encontre o maior número possível de polígonos com perímetro 12. Registe cada polígono que encontrou no papel ponteado."

Anexo 3 – Exemplos de avaliação

Avaliação de aprendizagens de unidade didáctica: medidas de tempo

Grelha de registo das aprendizagens

Domínio: Grandezas e medida (3.ª classe)

Objectivo: Compreender as medidas de tempo (ler e escrever horas, relacionar a hora, o minuto e o segundo)

Itens a avaliar / Nome do aluno	a) Utiliza com correcção o relógio.	b) Estabelece relações de ordem entre hora / minuto / segundo.	c) Efectua cálculos com unidades de medida de tempo.	d) Manipula matérias sociais de forma a retirar informação útil.	e) Resolve situações problemáticas envolvendo unidades de medida de tempo.	Observações
Maria	F	F	AV	F	AV	Ainda tem dificuldade a efectuar problemas e cálculos.

Exemplos de legenda:

Legenda: F (frequentemente) / AV (às vezes) / R (raramente)

Legenda: 1 – Nada satisfatório / 2 – Pouco satisfatório / 3 – Satisfatório / 4 – Bastante satisfatório / 5 – Completamente satisfatório

Exemplos

O item a) é passível de ser avaliado através da observação directa do professor a partir da manipulação, pelo aluno, dos ponteiros de um relógio construído em cartolina para marcação de uma hora dada pelo professor.

Os itens b) e c) são passíveis de ser avaliados através da observação da realização do seguinte exercício:

O João foi assistir a um filme ao cinema. O filme teve início às 14 h 50 min e terminou às 16 h 05 min. O filme demorou mais do que 2 horas? (Apresenta os teus cálculos.)

O item d) é passível de ser avaliado a partir de um exercício do tipo:

A Maria mora na Avenida e saiu de casa às 16 h 05 min para apanhar o autocarro para o Monte. Quando parou na paragem, apanhou o primeiro autocarro que passou. A que horas passou o autocarro que a Maria apanhou?

Horário do autocarro Lago-Monte

Lago	08:45	11:45	13:15	14:45	16:15	17:45	19:15	20:45
Avenida	08:50	11:50	13:20	14:50	16:20	17:50	19:20	20:50
Camélias	09:00	12:00	13:30	15:00	16:30	18:00	19:30	21:00
Monte	09:10	12:10	13:40	15:10	16:40	18:10	19:40	21:10

O item e) é passível de ser avaliado a partir de um exercício do tipo:

O Paulo saiu de casa às 7 h 45 min. Demorou 10 minutos para chegar à rua da escola, onde encontrou o seu amigo João. Conversaram um pouco durante 20 minutos e continuaram o caminho até à escola. A que horas entraram na escola?

Anexo 4 – Exemplo de registo de planificação de unidade didáctica

_.ª classe	Tema matemático:			
Tópico/ subtópico	**Objectivos de aprendizagem**	**Actividades/estratégias**	**Recursos**	**Avaliação**
	Nota: Aulas diferentes podem contemplar os mesmos objectivos de aprendizagem dentro de um tópico matemático.	Descrição da aula 1		Que instrumentos usar? O que avaliar?
		Descrição da aula 2		Que instrumentos usar? O que avaliar?
		Descrição da aula 3		Que instrumentos usar? O que avaliar?
		…		…

Anexo 5 – Exemplo de registo de planificação de aula

<table>
<tr><td>Disciplina: Matemática</td><td>N.º da lição:</td><td>Tempo:</td></tr>
<tr><td>Ano de escolaridade:</td><td colspan="2">Data:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tópico:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Subtópico:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objectivos específicos:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Capacidades transversais:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos/materiais:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sumário:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metodologia/estratégias:
Descrever e justificar os passos da aula, explicitando:
• como se inicia a actividade;
• as várias fases da actividade;
• como se finaliza a actividade;
• a natureza das tarefas (exercício? / problema? / jogo? /…);
• a organização (individual? / a pares? / em grupos de… / em grande grupo? / …).</td><td>Tempo previsto</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Avaliação:
Explicitar:
• o que pretende avaliar;
• os momentos em que vai avaliar;
• quais as tarefas;
• como vai registar a avaliação (nomeadamente com que instrumentos).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Observações:</td></tr>
</table>

Anexo 6 – Moldura de 10

Anexo 7 – Jogo "Perto de 100"

Precisa de cartões de papel com os algarismos de 0 a 9 (4 cartões de cada algarismo) e 4 cartões a dizer "vale tudo" que podem valer qualquer algarismo que o jogador escolha. Podem jogar 2 ou 3 jogadores.

Dar 6 cartões a cada jogador. Cada jogador escolhe 4 cartões para formar 2 números, cada um formado por 2 algarismos, para que a sua soma dê um valor o mais próximo possível de 100. Em cada jogada a distância da soma do jogador ao 100 é o número de pontos que ele coloca na grelha. Ganha quem ficar com menos pontos no final. Depois de uma jogada, são guardados os cartões usados. Cada jogador fica com os dois cartões que não usou e recebe 4 cartões novos para fazer uma nova jogada.

1	2	3	4	5	vale tudo
6	7	8	9	0	

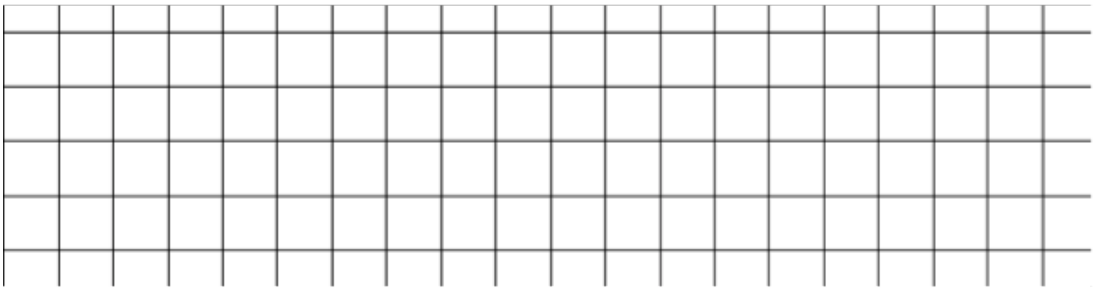
Exemplo:

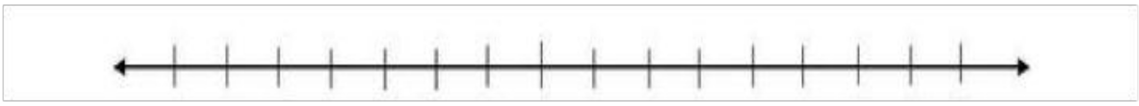
A Madalena, a Neusa e o Amândio realizaram um jogo. Na primeira jogada, a Madalena fez a soma 101, a Neusa fez a soma 98 e o Amândio fez a soma 100. Assim, ficaram com os pontos que registaram na grelha para a primeira jogada. Registaram também os pontos das outras duas jogadas. No final venceu o Amândio.

Registo:

	Madalena	Neusa	Amândio
Primeira jogada	1	2	0
Segunda jogada	0	1	0
Terceira jogada	1	3	1
Total	2	6	1

Anexo 8 – Modelo da recta numérica (graduada e não graduada)





Anexo 9 – Jogo do banqueiro

Modo de jogo: em grupos de 3 ou 4 alunos
Material: palhinhas, elásticos e dois dados.
Instruções

· Cada um dos grupos nomeia um banqueiro, que é responsável pelo material.

· Cada um dos restantes elementos do grupo, na sua vez, lança os dois dados e pede ao banqueiro um número de palhinhas igual à soma dos pontos indicados pelos dados.

· Sempre que cada um dos jogadores conseguir 10 fósforos, dirige-se ao banco para os trocar por um grupo de palhinhas correspondente.

· Sempre que cada um dos jogadores conseguir 10 grupos de palhinhas, deve dirigir-se ao banco para efectuar nova troca.

· O jogo termina ao fim de 10 lançamentos para cada jogador.

· No fim dos 10 lançamentos os alunos devem registar as suas pontuações na tabela.

Tabela de registo

Nome do aluno	N.º de 10 grupos de 10	N.º de grupos de 10	N.º de unidades	Total

Vencedor: Ganha o aluno que obtiver maior pontuação.

Sugestões

- Em cada jogada, calcula-se o produto do número de pontos indicados em cada um dos dados.
- Realizar o jogo com o material multibásico.

Anexo 10 – Tabela da centena

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

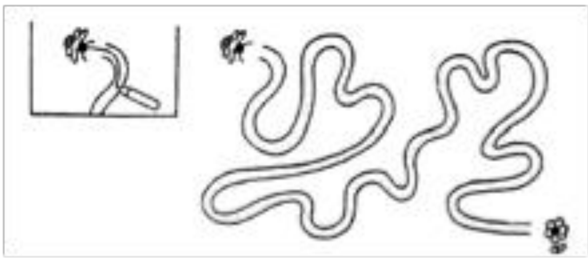
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Anexo 11 – Visualização espacial[1]

Coordenação visual motora
Capacidade de coordenar a visão com os movimentos do corpo.

Exemplos:

Começa a ser desenvolvida desde cedo em actividades como comer, jogar ou vestir-se. Contribuem para o desenvolvimento desta capacidade resolver e fazer labirintos, traçar figuras por cima, pintar desenhos, reproduzir desenhos dados, unir pontos com linhas (ex: desenhar em papel ponteado uma figura construída no geoplano).



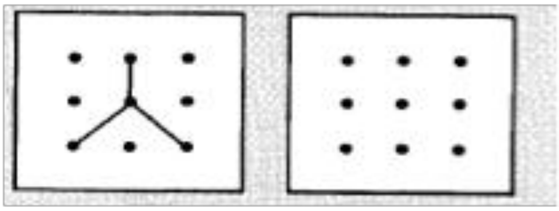
Memória visual

Capacidade de recordar objectos que já não são visíveis.

Exemplos:

Desenvolve-se em actividades que envolvem a observação de uma figura durante algum tempo e a sua reprodução, por parte dos alunos, já sem a observar. Por exemplo, podem observar uma construção de cubos e construir uma igual à que lhes foi mostrada mas sem voltarem a observá-la ou observar figuras desenhadas no geoplano e reproduzi-las sem observar.

1 Texto baseado em Matos e Gordo (1993) e Ponte e Serrazina (2000).

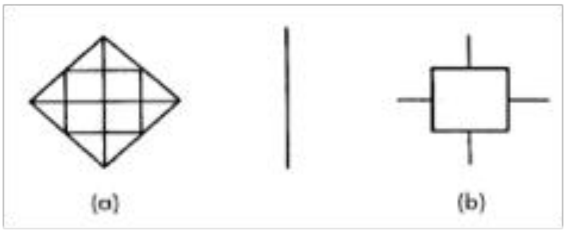


Percepção figura-fundo

Capacidade de identificar um componente específico numa determinada situação; envolve a mudança de percepção de figuras contra fundos complexos.

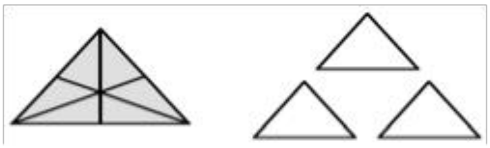
Exemplos:

Esta capacidade desenvolve-se em actividades que promovem a construção de figuras a partir de outras, do que é exemplo a utilização do tangram. Os alunos podem completar figuras de forma a se assemelharem a outras dadas;

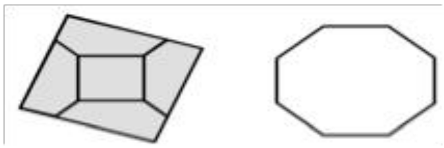


O Clicmat apresenta algumas situações interactivas que promovem a construção de figuras a partir de outras, como mostram os exemplos:

a)



b)



Constância perceptual

Capacidade de reconhecer figuras geométricas em diversas posições, tamanhos e contextos e texturas.

Exemplos:

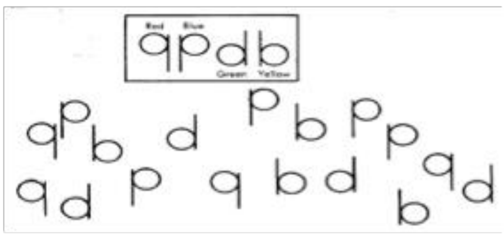
Pode ser desenvolvida em actividades que envolvem a utilização do geoplano, pois é possível representar uma figura e observá-la em diferentes posições. Por exemplo, os alunos podem descobrir no geoplano todos os quadrados não congruentes. Os alunos podem construir uma figura geométrica utilizando diversos materiais, ordenar objectos de acordo com o seu tamanho e iden-tificar figuras que tenham a mesma forma e o mesmo tamanho.

Percepção da posição no espaço

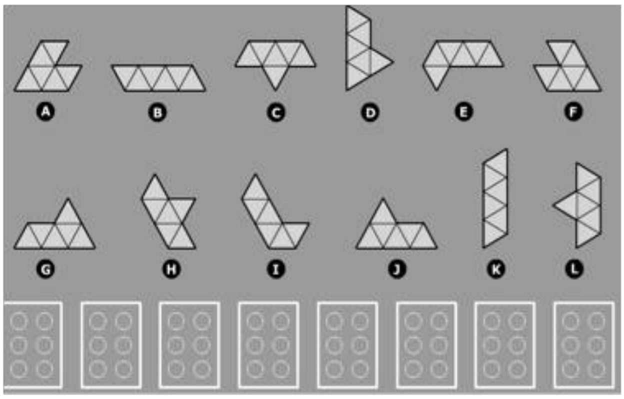
Capacidade para distinguir figuras iguais mas colocadas com orientações diferentes.

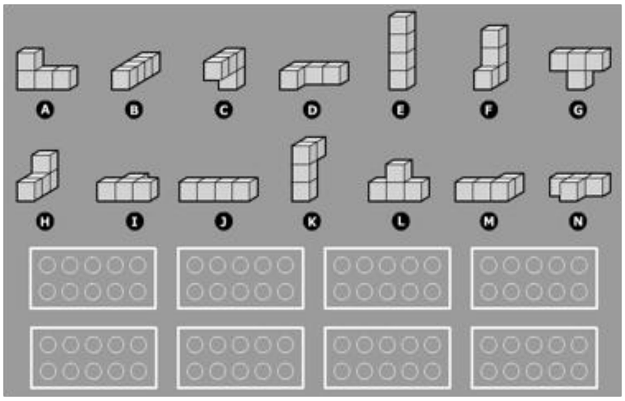
Exemplos:

Os alunos devem ser capazes de identificar figuras que, sendo iguais do ponto de vista da percepção figura-fundo ou da constância perceptual, têm orientações diferentes. Os alunos conseguem, assim, distinguir figuras iguais mas com orientações diferentes, como as da figura, pintando cada uma da sua cor:



As seguintes tarefas do Clicmat promovem esta capacidade:





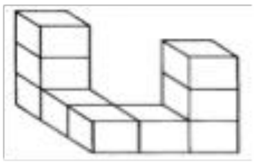
Percepção de relações espaciais

Capacidade de ver e imaginar dois ou mais objectos em relação consigo próprios ou em relação connosco.

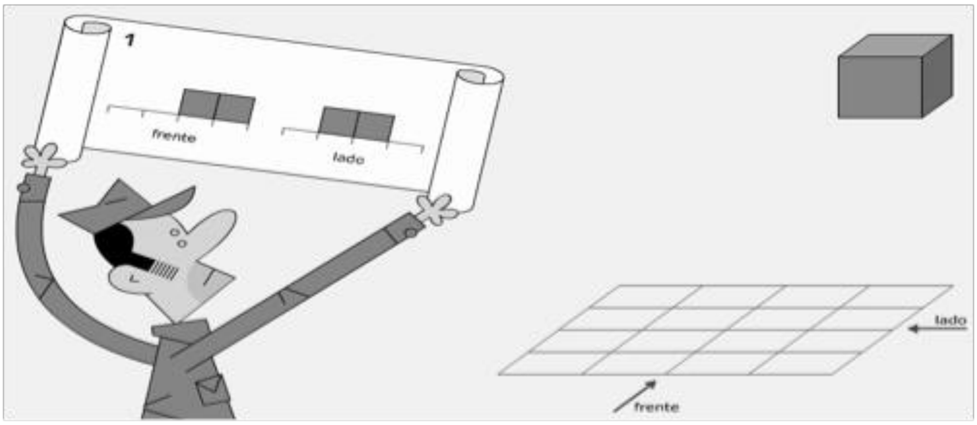
Exemplos:

Esta capacidade surge em actividades que fazem corresponder um sólido à sua planificação e vice-versa. A análise de vista promove esta capacidade, como sugerem as situações:

a) Desenha a vista de frente, de trás, de lado, de cima…



b) Clicmat

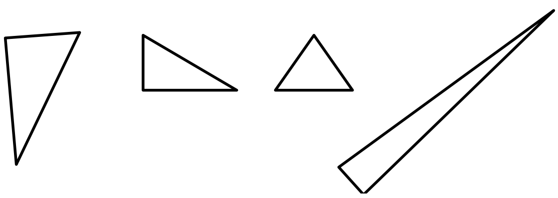


Discriminação visual

Capacidade para identificar semelhanças ou diferenças entre objectos.

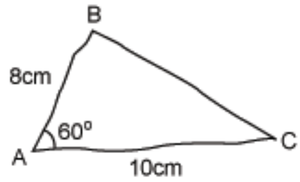
Exemplos:

Pode ser desenvolvida quando os alunos agrupam figuras geométricas dadas para formar conjuntos e identificam o critério utilizado. Descobrem diferenças entre duas figuras, identificam duas figuras que são iguais e descobrem critérios que conduzem a determinadas classificações ou ordenações.



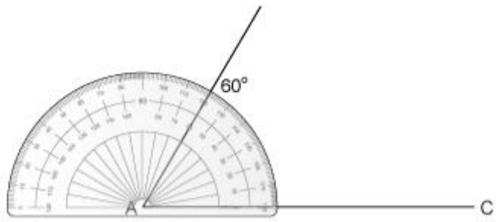
Anexo 12 – Construção de triângulos

Dados os comprimentos de dois lados e a amplitude do ângulo por eles formado



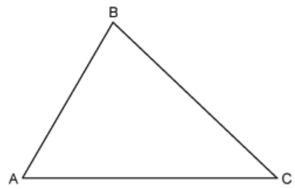
1.º Traçar o primeiro segmento de recta AC

2.º Com o transferidor marcar a amplitude do ângulo (60º)



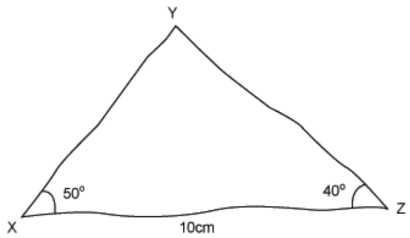
3.º Colocar a régua de modo a traçar o segmento de recta AB com 8 cm, desde o vértice A e passando pela marca dos 60º

4.º Unir o ponto B ao ponto C



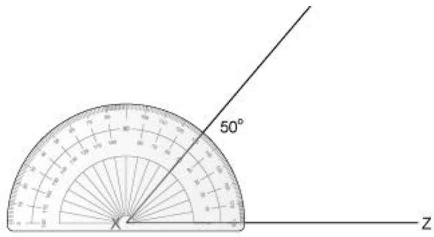
Classificação
Escaleno
Acutângulo

Dados o comprimento de um lado e a amplitude dos ângulos adjacentes a esse lado



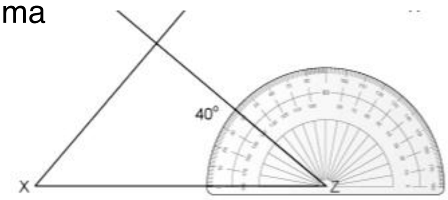
1.º Traçar o primeiro segmento de recta XZ

2.º Com o transferidor marcar a amplitude do ângulo (50º) no vértice X e traçar uma semi-recta



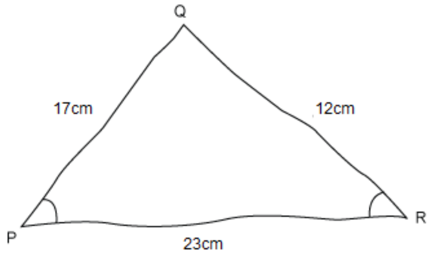
3.º Com o transferidor marcar a amplitude do ângulo (40º) no vértice Z e traçar uma semi-recta

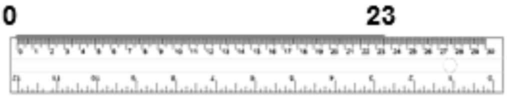
4.º Marcar o ponto Y onde as duas semi-rectas se intersectam



Classificação
Escaleno
Rectângulo

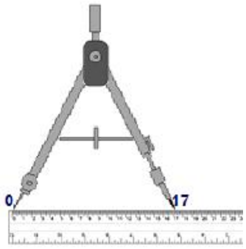
Dados os comprimentos dos três lados



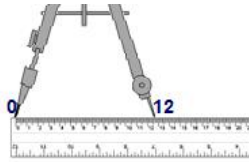


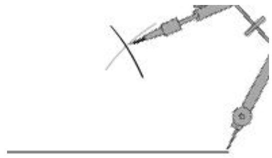
1.º Traçar o primeiro segmento de recta PR

2.º Medir, com a régua, uma abertura do compasso igual a 17 cm e colocar a ponta seca no ponto P para traçar um arco



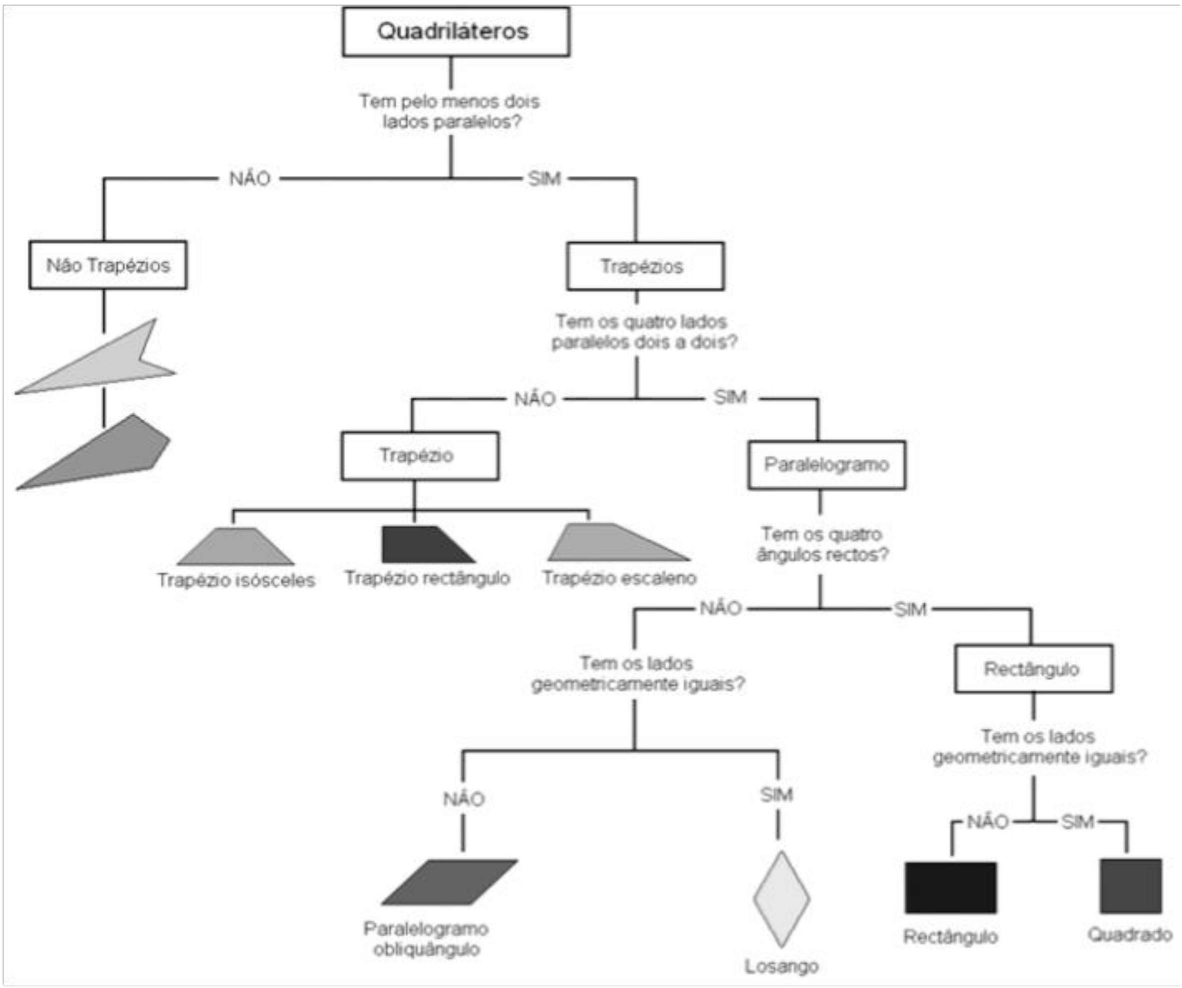
3.º Medir, com a régua, uma abertura do compasso igual a 12 cm e colocar a ponta seca no ponto R para traçar um arco





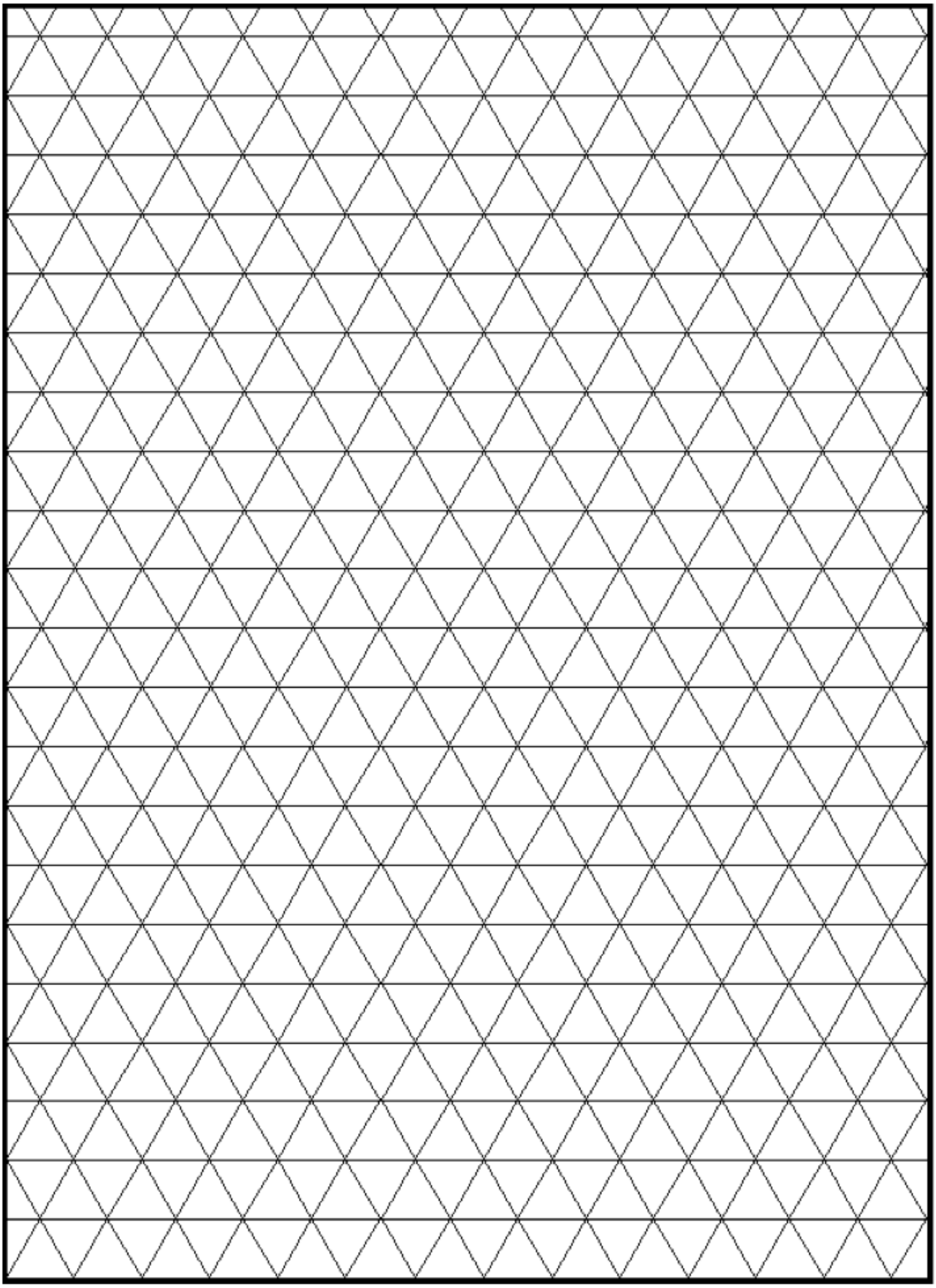
4.º O ponto de intersecção dos dois arcos corresponde ao vértice Q. Traçar os lados PQ e RQ

Anexo 13 – Classificação de quadriláteros

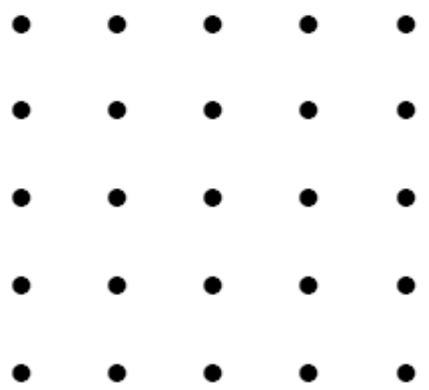


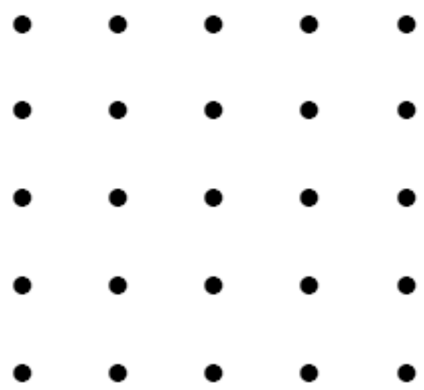
Anexo 14 – Papel quadriculado

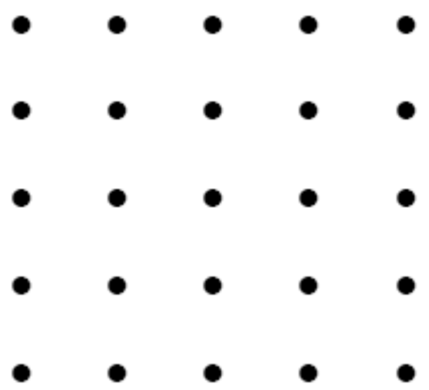
Malha triangular

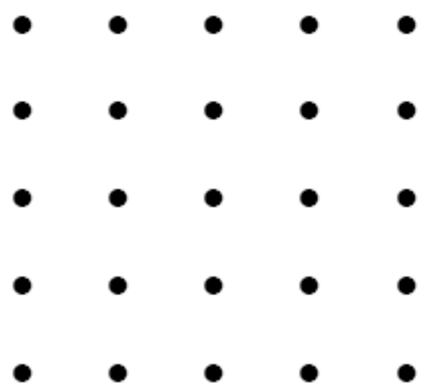


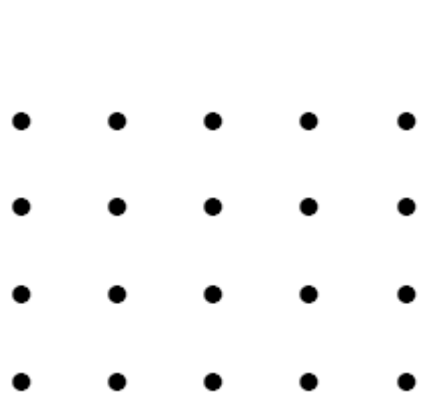
Anexo 15 – Ponteados de geoplano

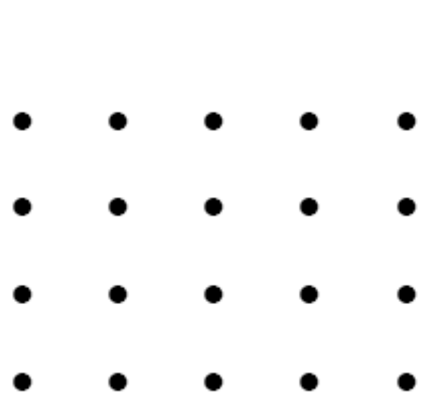












Edição 2016

Metodologia do Ensino da Matemática

PROJECTO REFORÇO INSTITUCIONAL E QUALITATIVO DO ENSINO BÁSICO (RIQUEB)

STP
Instituto Superior
de Educação e Comunicação

Apoio técnico:
Escola Superior de Educação
do Instituto Politécnico de Santarém