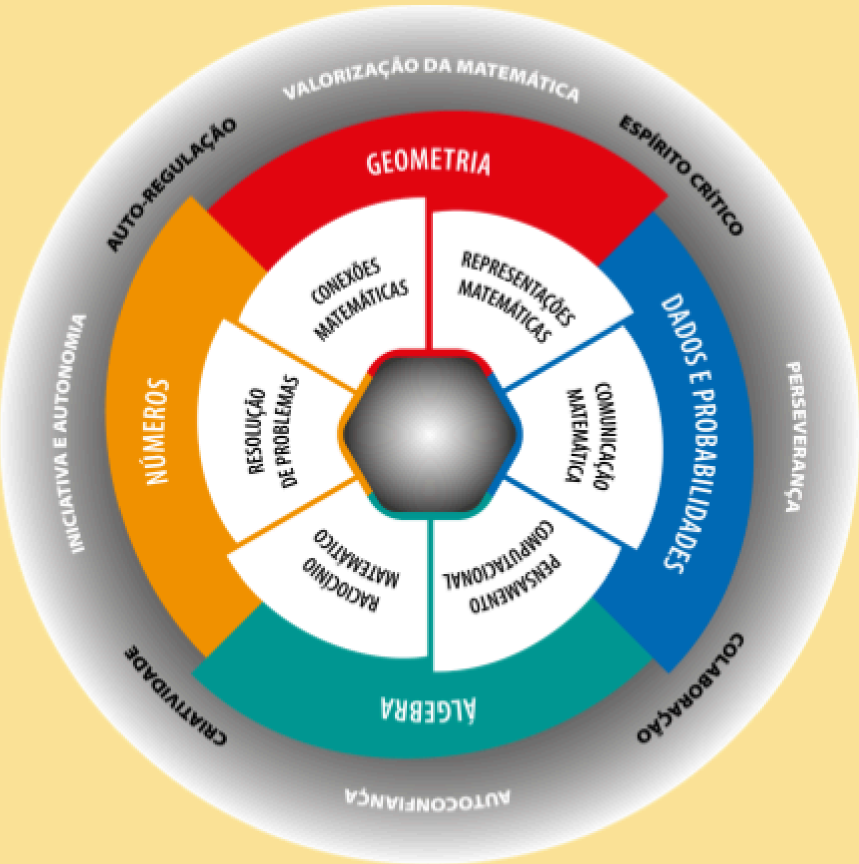
Pensamento computacional

no Ensino Básico



Célia Mestre, Neusa Branco, Rui Gonçalo Espadeiro

2025

direção-geral da educação | PESSOAS 2030 | PORTUGAL 2030 | Cofinanciado pela União Europeia

Ficha técnica

Título

Pensamento Computacional no Ensino Básico

Autores

Célia Mestre, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Neusa Branco, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém

Rui Gonçalo Espadeiro, Agrupamento de Escolas de Redondo

Edição

Direção-Geral da Educação

Diretor-Geral da Direção-Geral da Educação

David Sousa

ISBN

978-972-742-600-3

Data
2025

À *Leonor,*

com quem sempre aprendemos

Índice

Introdução

Esta publicação faz parte de um conjunto de brochuras publicadas pela Direção-Geral de Educação (DGE) no quadro do desenvolvimento das medidas de apoio à operacionalização das novas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico (Canavarro et al., 2021). Inicialmente concebidas pelo Grupo de Trabalho em Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática (GTDCPM)[1], deram origem a cinco publicações distintas que se constituem como recursos vocacionados para apoiar a generalização das novas orientações curriculares de Matemática nos diferentes ciclos do Ensino Básico. Cada brochura foi redigida por uma equipa de autores que inclui elementos do GTDCPM, tendo a sua maioria participado na escrita das Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Básico (AEMEB), e os professores dos diferentes ciclos de escolaridade que, desde 2021/22, anteciparam a generalização das AEMEB em algumas escolas, em colaboração com o GTDCPM.

Importa sublinhar que estas Aprendizagens Essenciais se constituem como um novo programa de Matemática para o Ensino Básico, com diferenças assinaláveis relativamente a anteriores programas de Matemática para os ciclos de escolaridade correspondentes. Assim, destacamos:

1. Assunção de **três princípios essenciais** que moldam as opções curriculares tomadas: o princípio da Matemática para todos, o princípio da Matemática para o século XXI, e o princípio da Matemática é única, mas não é a única.
2. Privilégio do desenvolvimento da **literacia matemática,** entendendo-a como "a capacidade de raciocinar matematicamente e interpretar e usar a Matemática na resolução de problemas de contextos diversos do mundo real" (Canavarro et al., 2021, p. 2), de modo "que cada pessoa possa viver e atuar socialmente de modo informado, contributivo, autónomo e responsável" (idem, p. 2). A ideia de literacia matemática constitui a finalidade última para a qual as aprendizagens dos diversos conteúdos devem ser orientadas.
3. Consideração de **conteúdos de natureza diversa na aprendizagem em Matemática:** conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Estes conteúdos de aprendizagem são de natureza diversa, e a sua abordagem deve ser feita de forma articulada e continuada, em todos os ciclos de escolaridade;
4. Valorização de uma **abordagem integrada e continuada de conhecimentos matemáticos** respeitantes a quatro temas clássicos — Números, Álgebra, Dados e Probabilidades, e

[1] O GTDCPM é constituído por Leonor Santos (Coordenadora), Ana Paula Canavarro, Célia Mestre, Cristina Martins, Elvira Santos, Helena Gil Guerreiro, Hélia Jacinto, João Almiro, Lina Brunheira, Neusa Branco, Paulo Correia, Rosa Tomás Ferreira e Rui Gonçalo Espadeiro.

Geometria e Medida (apenas Geometria no 3.º Ciclo) — prevendo-se que todos os temas sejam abordados ao longo de todos os anos de escolaridade de cada ciclo, através de tarefas que envolvam conceitos associados a quantidade, relações, dados e incerteza, e espaço e forma.

5. Valorização do desenvolvimento de um conjunto alargado de seis **capacidades matemáticas transversais**, incluindo capacidades há muito reconhecidas como centrais — a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática — e ampliando o leque a outras que são agora igualmente contempladas — as representações matemáticas, as conexões matemáticas, e o pensamento computacional.
6. Valorização do desenvolvimento de **capacidades e atitudes gerais transversais** que passam a estar explicitamente previstas, nomeadamente as que decorrem da seleção das capacidades e atitudes das áreas de competências previstas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO) (Martins et al., 2016) que mais diretamente se relacionam com o trabalho em Matemática. São elas as capacidades de pensamento crítico, criatividade, colaboração e autorregulação, e as atitudes de autoconfiança, perseverança, iniciativa e autonomia e valorização do papel do conhecimento, neste caso da Matemática. Esta seleção não pressupõe que as outras competências do PASEO sejam excluídas da aula de Matemática, devendo ser consideradas sempre que surgirem como relevantes ao longo do trabalho com os alunos.
7. Assunção da importância da adoção de **métodos de ensino de natureza exploratória**, centrados na atividade dos alunos/as, apoiados por recursos poderosos que ampliem e enriqueçam a experiência matemática dos alunos, como é o caso de recursos digitais.

Temos consciência que a operacionalização das novas orientações curriculares poderá colocar desafios e levantar dificuldades aos professores, nomeadamente no que diz respeito à consideração de uma diversidade de conteúdos de aprendizagem a serem abordados de forma integrada na sala de aula, envolvendo conhecimentos matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Assim, neste conjunto de brochuras, optamos por colocar o foco no trabalho a desenvolver em sala de aula para levar a cabo esta orientação fundamental, dando particular relevo ao desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais.

Das cinco brochuras, uma é especialmente focada no pensamento computacional, o que se justifica pelo caráter de novidade que esta capacidade representa. As outras quatro brochuras dedicam-se ao conjunto das seis capacidades matemáticas transversais, com explorações nos diferentes ciclos de escolaridade (1.º Ciclo — 1.º e 2.º anos, 1.º Ciclo — 3.º e 4.º anos, 2.º Ciclo, 3.º Ciclo).

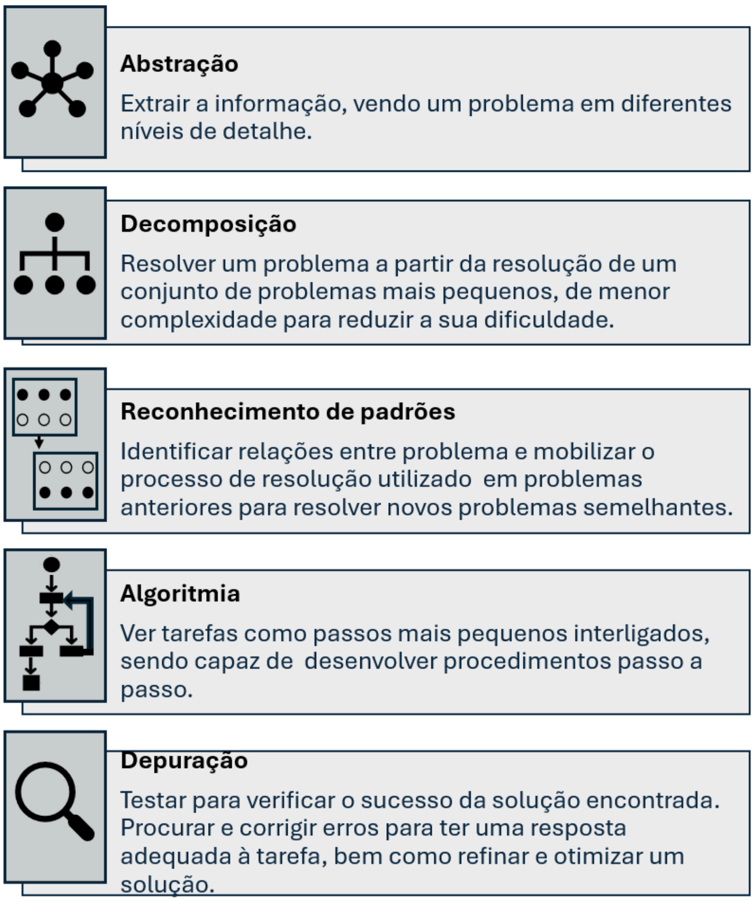
A presente brochura, dedicada ao pensamento computacional no ensino básico, organiza-se em quatro partes. Após esta introdução, que apresenta as brochuras, a segunda parte faz uma breve contextualização do pensamento computacional como capacidade matemática transversal a desenvolver ao longo do Ensino Básico. A terceira parte apresenta exemplos de tarefas matemáticas para cada um dos três ciclos do ensino básico. Para cada tarefa apresenta-se o enunciado, o enquadramento curricular e sugestões para a exploração da tarefa, nomeadamente no que às práticas de pensamento computacional diz respeito e à possível articulação com outras capacidades matemáticas transversais, os temas matemáticos e capacidades e atitudes gerais transversais. Por fim, na quarta parte, elenca-se um conjunto de recursos que podem ser mobilizados para o desenvolvimento desta capacidade matemática.

Esperamos que este documento possa ajudar os professores na operacionalização das novas orientações curriculares de Matemática para o Ensino Básico, constituindo-se como um recurso quer para o trabalho individual de preparação do professor, quer para o trabalho colaborativo que poderá desenvolver com os seus pares na escola e agrupamento. Se é verdade que os materiais com a natureza destas brochuras, que proporcionam conhecimento da prática de trabalho com alunos reais, em contextos reais, podem ser muito inspiradores de cada um dos professores, o seu efeito será muito mais potenciado se forem entendidos como recursos para apoiar o trabalho nas escolas, entre pares, contribuindo para a concretização do desenvolvimento curricular que importa fazer, tendo em vista a qualificação e adequação das práticas de ensino visando a melhoria das aprendizagens matemáticas dos alunos em Portugal.

O pensamento computacional na aprendizagem da Matemática

O pensamento computacional é uma das capacidades matemáticas transversais considerada nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o Ensino Básico, a ser desenvolvida e mobilizada em articulação com os diversos temas matemáticos, outras capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais. Esta capacidade matemática, que surge pela primeira vez nos documentos curriculares de Matemática em Portugal, "pressupõe o desenvolvimento, de forma integrada, de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, e o desenvolvimento de hábitos de depuração e otimização dos processos" (Canavarro et al., 2021, p. 3). O foco é a valorização de conhecimentos e capacidades, articulando os temas matemáticos e o pensamento computacional para a melhoria da compreensão de conceitos e desenvolvimento integrado de capacidades matemáticas diversas (Hardin & Horton, 2017; Ng & Cui, 2021). As Aprendizagens Essenciais, sustentadas em investigação sobre o tema, centram-se em cinco práticas do pensamento computacional: abstração, decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmia e depuração, que são sistematizadas na figura 1 (baseada em Espadeiro (2021); Hoyles & Noss (2015); Ng & Cui (2021)).

Figura 1. Práticas do pensamento computacional



Para que os alunos tenham experiências em que essas práticas possam emergir, o professor tem de apresentar propostas concretas que visem os objetivos de aprendizagem específicos que lhe estão inerentes. É preciso que exista, da parte do professor, intencionalidade no desenvolvimento das práticas do pensamento computacional, tanto na criação ou adaptação de tarefas, como no modo como estas são exploradas na sala de aula, como refere Espadeiro (2021). Ye e colegas (2023), na revisão sistemática de investigação que realizaram sobre a integração do pensamento computacional na educação matemática nos níveis desde a educação de infância ao 12.º ano (K-12), identificam que, ao se envolverem em atividades matemáticas baseadas em pensamento computacional, os alunos produzem artefatos e soluções programáveis, bem como constroem significados para vários conceitos, tanto específicos de pensamento computacional, como mais genéricos de Matemática.

No 1.º Ciclo, pretende-se que o pensamento computacional seja explorado de forma simples e com apoio de tecnologia, nomeadamente para a resolução de problemas, contribuindo para a capacidade de análise e definição de estratégias. Já no 2.º Ciclo, as situações propostas vão-se tornando cada vez mais complexas para os alunos, criando oportunidades para que desenvolvam o seu pensamento computacional, evidenciando capacidade de elaborar procedimentos passo a passo e de refinar e otimizar as suas soluções. Também neste nível de ensino deve ser proposto o uso de tecnologia, por exemplo, para o trabalho em ambientes de programação visual. Por sua vez, no 3.º Ciclo, deve assegurar-se a gradual progressão da complexidade das situações propostas com vista à continuação do desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos. Também neste ciclo é promovido o recurso à tecnologia, incentivando os alunos a criarem algoritmos. Ao longo dos três ciclos deve ser valorizada a diversidade de representações, a mobilização de conexões internas e externas e o contributo recíproco das capacidades de resolução de problemas, de comunicação matemática e de raciocínio matemático. Além disso, os contextos que visam o desenvolvimento e a mobilização de práticas do pensamento computacional podem também ser contextos promotores, nomeadamente de criatividade, espírito crítico, perseverança e inclusão, numa perspetiva de Matemática para todos. Pretende-se melhorar a capacidade dos alunos para selecionarem e aplicarem estratégias e ferramentas adequadas para resolverem problemas, numa perspetiva de Matemática para o século XXI, com ou sem recurso a um ambiente digital.

Ainda que o pensamento computacional tenha surgido como uma abordagem que permite fazer uso de computadores para resolver problemas (Wing, 2006, 2008), esta capacidade pode ser promovida em tarefas com recurso a computador, em exercícios de programação, e em tarefas sem recurso ao computador. Li e colegas (2022) identificam diversos investigadores que sugerem que o pensamento computacional pode ser desenvolvido sem computador, com atividades desconectadas (*unplugged activities*). Estas são atividades que visam a aprendizagem de ciências da computação, mas sem o computador. Podem ser atividades como as mencionadas por Li e colegas (2022) e Sun e colegas (2022), as quais exemplificamos: jogos de lógica, jogos de tabuleiro e jogos de cartas, atividades em papel e atividades *hands-on*, com materiais manipuláveis físicos, robótica e blocos desconectados, fora de um contexto de programação com o computador. Li e colegas (2022) também identificam investigadores que consideram que o desenvolvimento do pensamento computacional melhora com práticas de programação com computadores, atividades conectadas (*plugged activities*). Estas visam o uso de tecnologia digital, em particular envolvendo contextos de programação. Como referem Carvalho e colegas (2023), o pensamento computacional envolve "conceitos que são subjacentes à programação e não só na ação da programação em si, o que exige múltiplos níveis de abstração e capacidade reflexiva de um ponto de vista não rotineiro" (p. 7). Assim, tarefas que permitam o envolvimento dos alunos em práticas do pensamento computacional mesmo sem o computador, contribuem para o desenvolvimento desta capacidade, que não se reduz à programação. O trabalho com atividades desconectadas, antes do trabalho em atividades conectadas, pode contribuir de modo eficaz para o desenvolvimento do pensamento computacional (Sun et al., 2022). Contudo, é importante que os alunos tenham também experiências em tarefas conectadas, uma vez que podem potenciar a concretização de ideias e a exploração de relações que sem o computador podem ficar comprometidas.

A utilização do computador e de programas específicos requer também uma apropriação do seu funcionamento, das suas limitações e vantagens. Estas podem ter impacto na solução que é encontrada para um problema ou ter influência nas práticas do pensamento computacional que emergem na resolução de um dado problema. Pode também ser pertinente a resolução de um mesmo problema com recurso a diferentes ferramentas tecnológicas ou com diferentes *software*, permitindo a comparação entre estratégias de resolução e conclusões. Assim, no sentido de potenciar a compreensão de ideias matemáticas e o desenvolvimento do pensamento computacional, em articulação também com outras capacidades transversais, os alunos devem ter experiências ricas para a sua aprendizagem que envolvam a utilização de robôs, aplicações digitais diversificadas e *software* específico, como é sugerido nos exemplos de tarefas que são apresentados nesta brochura. Estes exemplos incluem a discussão de tarefas em que é proposta a utilização de objetos robóticos simples, de aplicações para apoiar a representação, da folha de cálculo, de um ambiente de geometria dinâmica, como o GeoGebra, e de um ambiente de programação visual, como por exemplo o Scratch.

Concluindo, o professor pode integrar atividades desconectadas e conectadas para promover o desenvolvimento do pensamento computacional e, gradualmente, reforçar o recurso ao computador para a resolução de problemas.

Exemplos de tarefas

Tarefas para o 1.º Ciclo

Nesta secção, destinada ao 1.º Ciclo do Ensino Básico, são apresentados quatro exemplos de tarefas que visam as diversas práticas do pensamento computacional, em articulação com diversos temas matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais, assim como é apresentado em cada uma das tabelas relativas aos conteúdos de aprendizagem. Um aspeto que também é relevante nas tarefas é que procuram apresentar propostas com recurso à tecnologia, mas que também podem ser exploradas sem recurso à tecnologia. Assim, na tarefa Itinerários é proposto o recurso ao geoplano, mas também pode usar-se um robô simples, não prescindindo do uso de papel e lápis para registo dos percursos, nas tarefas Sequências de repetição, Pensa num número e Castelos na areia é sugerida a utilização do computador e do ambiente de programação por blocos Scratch, não prescindindo de igual forma do recurso ao papel e lápis.

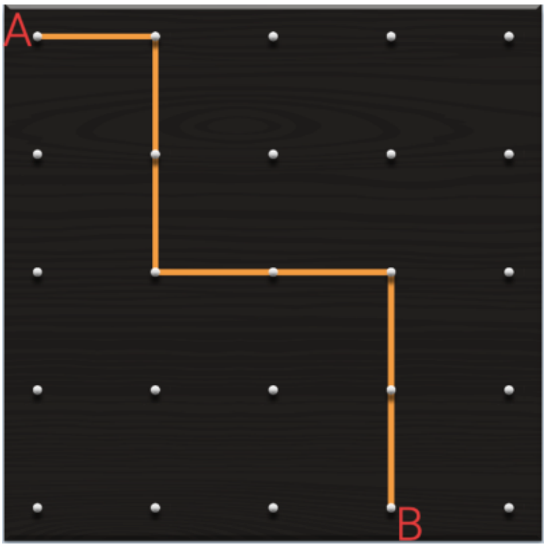
Itinerários

Esta tarefa enquadra-se nas Aprendizagens Essenciais do 2.º ano de escolaridade, remetendo para o desenvolvimento do pensamento computacional de modo articulado com aprendizagens visadas no tema Geometria e Medida, no que respeita ao tópico Orientação espacial, e ao subtópico Itinerários.

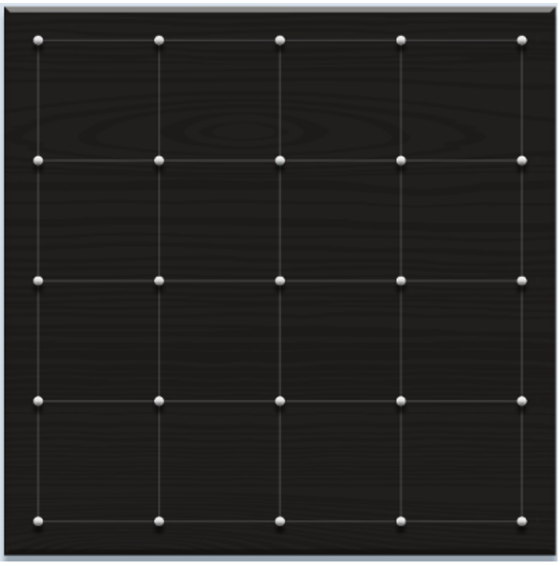
Enunciado da tarefa

Tarefa
Itinerários

1. Descreve o itinerário do ponto A ao ponto B, usando os termos adequados.



2. Desenha um itinerário no geoplano e dita-o ao teu colega.



Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Geometria e Medida Orientação espacial	Itinerários
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento Computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Autorregulação Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Criar, representar e comparar itinerários, usando os termos “quarto de volta”, “meia volta”, “três quartos de volta” e “volta completa” para explicar as suas ideias.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.

- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Geoplanos, papel ponteado, papel quadriculado, robô simples.

Exploração da tarefa

Questão 1

Os alunos devem descrever o itinerário representado no geoplano, do ponto A ao ponto B, usando os termos "quarto de volta", "meia volta", "três quartos de volta" e "volta completa", se aplicável. Podem ainda usar como unidade de medida de comprimento a menor distância entre dois pregos, referindo-se a essa distância como "1 passo". Esta tarefa pode ser realizada em pares.

É importante que os alunos tenham experiências anteriores envolvendo a deslocação no espaço e o próprio corpo, reproduzindo deslocações mediante instruções dadas pelos colegas e também experiências de construção dessas próprias instruções, usando o vocabulário "quarto de volta", "meia volta", "três quartos de volta" e "volta completa". Por exemplo, usando as marcas dos mosaicos do chão (da sala de aula ou do recreio) ou marcas feitas com fita cola colorida de modo a reproduzir um formato quadriculado, um aluno dita um itinerário ao colega que o reproduz, trocando de papéis, em seguida. A familiaridade com estas experiências de aprendizagem contribui para que os alunos sintam menos dificuldades em realizar tarefas que envolvam o trabalho com itinerários em contextos mais abstratos, como este que requer a utilização do geoplano. Caso ainda surjam dificuldades, o itinerário representado no geoplano pode ser reproduzido no chão da sala de aula/recreio para que os alunos o reproduzam usando deslocações com o próprio corpo.

É expectável que os alunos descrevam o itinerário apresentado da seguinte forma: "Sai do ponto A, anda 1 passo em frente, vira um quarto de volta para a direita e anda 2 passos em frente. Em seguida, vira um quarto de volta para a esquerda e anda 2 passos em frente. Vira um quarto de volta para a direita, anda 2 passos em frente e chega ao ponto B".

Questão 2. Nesta questão é solicitado que os alunos criem um itinerário no geoplano e o ditem ao colega para que este o reproduza. Na descrição do itinerário devem usar o vocabulário apropriado. Enquanto o itinerário é ditado por um dos colegas e o outro o reproduz, é possível identificar erros nas instruções dadas ou na sua reprodução. Por exemplo, se o colega dá como instrução a seguinte "vira um quarto de volta para a direita" e o colega vira um quarto de volta para a esquerda, os dois podem identificar essa incorreção e corrigi-la no imediato. Da mesma forma, se o colega pretendia dizer "um quarto de volta para a esquerda" e diz "um quarto de volta para a direita", poderá corrigir essa instrução ao identificar o movimento feito pelo colega que reproduz as instruções. Estes exemplos permitem perceber como os alunos trabalham a prática da depuração.

Para além do geoplano e da possibilidade de recriar o itinerário usando o chão da sala/recreio e o próprio corpo, os alunos podem ainda recorrer a um robô simples para reproduzir o itinerário. Podem inicialmente reproduzir as instruções usando setas de direção (que podem desenhar ou usar cartões) e, depois, programar o robô de acordo com as instruções criadas, testando-as e corrigindo-as, caso seja necessário, desenvolvendo a prática da depuração.

Após a realização da tarefa pelos pares deve ser promovido um momento de discussão coletiva que conduza os alunos a refletirem sobre a eficácia das instruções dadas, analisando a sua clareza e correção, identificando o uso adequado dos termos relativos à orientação espacial. De forma intencional, esta tarefa promove o desenvolvimento da prática da algoritmia ao trabalhar as instruções dos itinerários, promovendo o uso dos termos apropriados de "quarto de volta", "meia volta", "três quartos de volta" e "volta completa".

O trabalho em torno da tarefa permite ainda desenvolver a capacidade da comunicação matemática, seja quando os alunos descrevem os itinerários, recorrendo ao vocabulário apropriado e produzindo um discurso claro e compreensível, como quando discutem as suas ideias e tentam compreender as ideias dos colegas.

A sequência de frutas

Esta tarefa enquadra-se nas Aprendizagens Essenciais do 3.º ano de escolaridade, remetendo para o desenvolvimento do pensamento computacional de modo articulado com aprendizagens visadas no tema Álgebra, no que respeita ao tópico Regularidades em sequências, e ao subtópico Sequências de repetição.

Enunciado da tarefa

Tarefa
A sequência de frutas

Na sala do Carlos, os alunos comem fruta todos os dias. Num dos dias, decidiram organizar a fruta pela seguinte ordem, que se ilustra aqui até ao termo de ordem 9:

1.º 2.º 3.º 4.º 5.º 6.º 7.º 8.º 9.º

1. Que fruta estará na ordem 24.ª? Justifica a tua resposta.
2. A fruta preferida da Matilde é banana. O que podes dizer sobre as ordens em que essa fruta se encontra na sequência?
3. Se continuares esta sequência, que fruta está na ordem 32.ª? Justifica a tua resposta.
4. Constrói um jogo em Scratch para esta sequência. Deves ter um ator à tua escolha que pede ao jogador que indique um número natural qualquer (ordem do termo da sequência). De acordo com o número indicado pelo jogador, esse ator deve conseguir identificar qual a fruta que está nessa ordem da sequência e mostrá-la ao jogador.

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Álgebra Regularidades em sequências	Sequências de repetição
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento Computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar Justificar
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Autorregulação Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Identificar e descrever o grupo de repetição de uma sequência.
- Descrever, em linguagem natural, a regra de formação de uma sequência de repetição, explicando as suas ideias.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes.

- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador para utilização do Scratch.

Exploração da tarefa

Questão 1

Na parte 1 desta tarefa pretende-se que os alunos explorem as regularidades da sequência de repetição, reconhecendo os padrões nos termos apresentados e, a partir daí, consigam antecipar qual será a 24.ª fruta. Para tal, precisam de identificar o grupo de repetição da sequência, reconhecendo a repetição das três peças de fruta e a sua ordem: maçã, laranja, banana. Para identificar qual a peça de fruta que será o 24.º termo da sequência podem reconhecer 24 como múltiplo de 3, considerando que é expectável que usem experiências anteriores de exploração de sequências de repetição. Os alunos que ainda revelem algumas dificuldades podem imaginar a continuação da sequência e fazer a contagem dos termos até ao 24.º, usando os termos visíveis ou, neste caso, podem ainda imaginar a continuação da sequência até ao 12.º termo, como metade de 24, e expandir a conclusão para o 24.º termo.

Questão 2

Esta questão já induz explicitamente para o reconhecimento dos múltiplos de 3, conduzindo os alunos a reconhecerem que a banana será a peça de fruta que surge nos termos que são múltiplos de 3. É expectável que os alunos reconheçam esse padrão a partir da análise do 3.º, 6.º e 9.º termos da sequência e que formulem conjeturas tais como "a banana aparece sempre de três em três"ou "aparece sempre nos números da tabuada do 3".

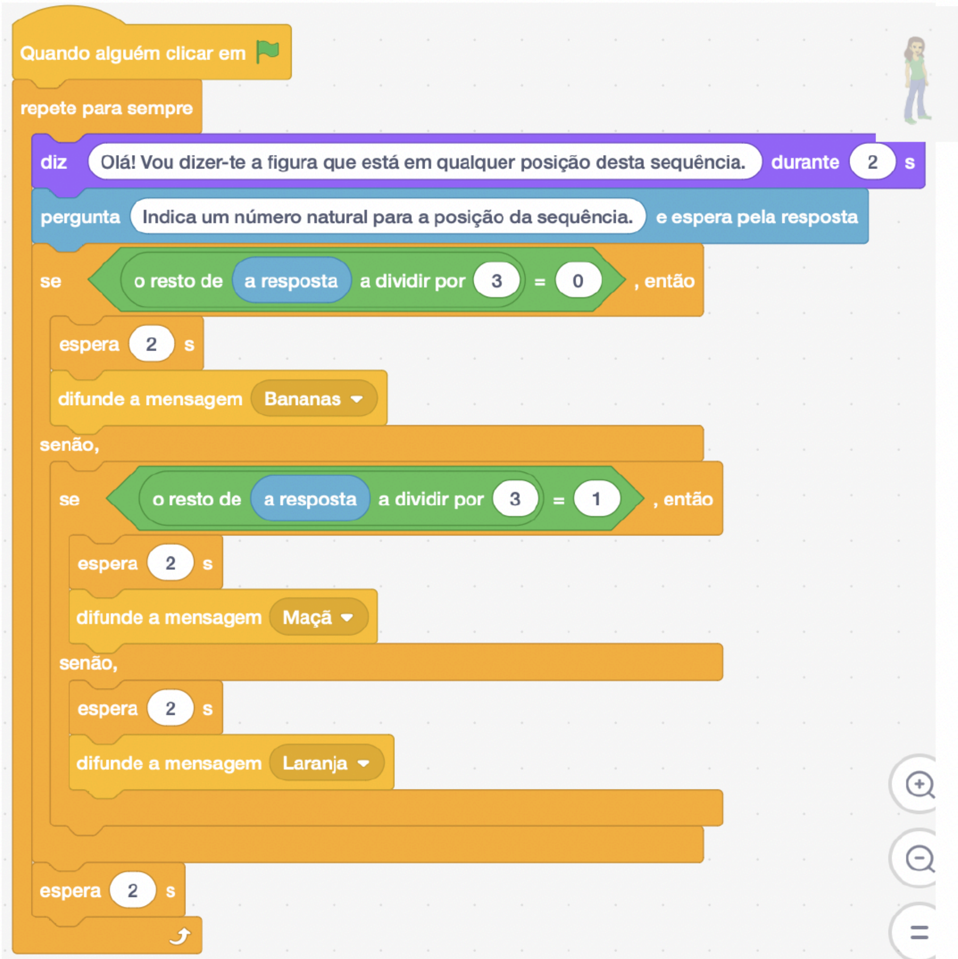
Questão 3

A partir do reconhecimento do grupo de repetição e da identificação dos múltiplos de 3, esta questão pode conduzir à formulação de conjeturas sobre os termos que antecedem ou sucedem os múltiplos de 3. Desta forma, os alunos podem referir que "se 30 é múltiplo de 3, 33 também é e o 32.º termo será uma laranja, porque antes da banana vem sempre uma laranja" ou "Se 30.º termo é uma banana, o 31.º é uma maçã e o 32.º será uma laranja".

Questão 4

A questão 4 mobiliza diretamente o pensamento algorítmico, exigindo que os alunos expressem, usando operadores matemáticos as regras, que já reconheceu na resolução das questões anteriores. Assim, é importante que mobilizem o conceito de múltiplo de um número natural para além do reconhecimento mais imediato de que "é sempre de três em três". Devem, assim, recorrer à divisibilidade por 3, identificando a divisão exata e reconhecendo que o resto terá de ser zero. Para identificar os restantes termos da sequência, deverá mobilizar a relação dos mesmos com os múltiplos de 3 e a identificação dos restos: resto 1 para os termos que assumem a maçã e resto 2 para os termos que assumem a laranja. Poderá ainda ser mais eficaz na programação recorrendo aos comandos de condição "se" e " senão", otimizando a programação.

Figura 2. Exemplo de programação possível em Scratch



Pensa num número

Esta tarefa enquadra-se nas Aprendizagens Essenciais do 4.º ano de escolaridade, remetendo para o desenvolvimento do pensamento computacional de modo articulado com aprendizagens visadas no tema Números, no que respeita ao tópico Cálculo mental, e ao subtópico Estratégias de cálculo mental e pretende trabalhar o cálculo mental com números decimais.

Enunciado da tarefa

Tarefa
Pensa num número

Vamos fazer um jogo com números. Segue as instruções:

1. Pensa num número:
   1.1. Multiplica-o por 0,1.
   1.2. Descobre uma forma de voltar a obter o número em que pensaste inicialmente apenas com uma operação. Justifica a tua resposta.
2. Pensa num número:
   2.1. Multiplica-o por 0,5.
   2.2. Descobre uma forma de voltar a obter o número em que pensaste inicialmente apenas com uma operação. Justifica a tua resposta.
3. Pensa num número:
   3.1. Multiplica-o por 0,25.
   3.2. Descobre uma forma de voltar a obter o número em que pensaste inicialmente apenas com uma operação. Justifica a tua resposta.
4. Constrói um jogo no Scratch que permita "adivinhar" os números em que o jogador pensou, a partir dos números finais que o jogador diz ter obtido após ter usado as regras anteriores.

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Números Cálculo mental	Estratégias de cálculo mental
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento Computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Raciocínio matemático	Conjeturar e generalizar Justificar
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Autorregulação Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Compreender e usar com fluência estratégias de cálculo mental diversificadas, para produzir o resultado de um cálculo que envolva decimais, relacionando-as com as estratégias de cálculo mental usadas com os números naturais.
- Mobilizar os factos básicos da adição/subtração e da multiplicação/divisão e as propriedades das operações, para realizar cálculo mental que envolva decimais.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de um problema e aplicar os que se revelam eficazes na resolução de outros problemas semelhantes.

- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Justificar que uma conjetura/generalização é verdadeira ou falsa, usando progressivamente a linguagem simbólica.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador para utilização do Scratch.

Exploração da tarefa

Questões 1, 2 e 3

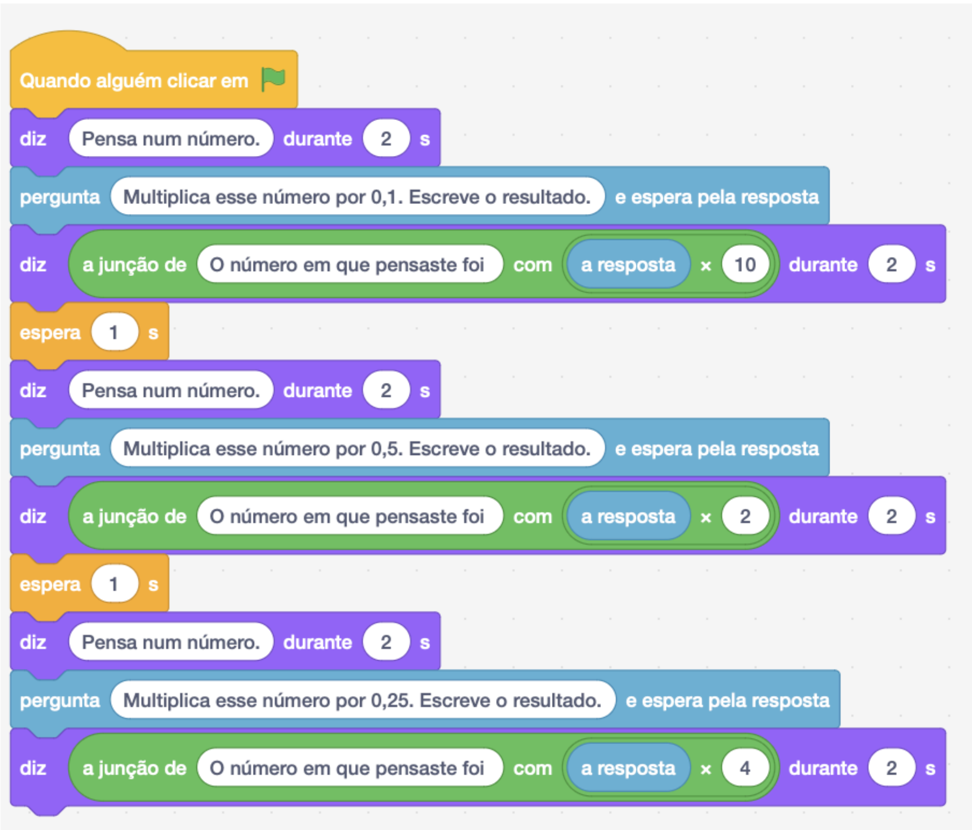
A partir da proposta de um jogo de adivinha o número, estas questões exploram as relações entre as operações inversas usando como contextos os números decimais, contribuindo ainda para promover a compreensão destes números que são introduzidos no 4.º ano de escolaridade. Os alunos devem reconhecer que o inverso de multiplicar por 0,1, 0,5 e 0,25 é, respetivamente, multiplicar por 10, 2 e 4 e que serão essas operações que deverão efetuar para descobrirem os números em que pensaram inicialmente. O reconhecimento destes padrões é essencial para que possam resolver a questão 4. Para tal, os alunos podem recorrer a diversos exemplos, decompondo o problema e extraindo a informação essencial de modo a formularem as suas conjeturas, testando-as e depurando-as, até conseguirem formular as generalizações válidas.

Questão 4

A questão 4 mobiliza diretamente o pensamento algorítmico, exigindo que o aluno expresse usando operadores matemáticos as regras que já reconheceu na resolução das questões anteriores. Desta forma, o aluno deverá recorrer à multiplicação por 10, 2 e 4 para descobrir os números que inicialmente foram multiplicados por 0,1, 0,5 e 0,025 respetivamente.

Nesta tarefa, os alunos mobilizam ainda os processos de conjeturar, generalizar e justificar relativos à capacidade de raciocínio matemático. Têm ainda oportunidade de desenvolver a sua capacidade de comunicação matemática ao expressarem as suas ideias de forma clara de modo a serem compreendidos pelos colegas e ao ouvirem e discutirem com os colegas para compreender a forma como estes pensaram.

Figura 3. Exemplo de programação possível em Scratch



Castelos na areia

A tarefa Castelos na areia foi criada no âmbito da antecipação da operacionalização das Aprendizagens Essenciais do 4.º ano, constando da coletânea de tarefas desse ano de escolaridade (Guerreiro et al., 2023). Enquadra-se assim nas Aprendizagens Essenciais do 4.º ano de escolaridade, envolvendo o desenvolvimento do pensamento computacional e o tema Álgebra, no tópico Regularidades em sequências, e subtópico Sequências de crescimento.

Enunciado da tarefa

Tarefa

Castelos na areia

1. Num dia de praia dois amigos construíram castelos que organizaram de acordo com a sequência seguinte:

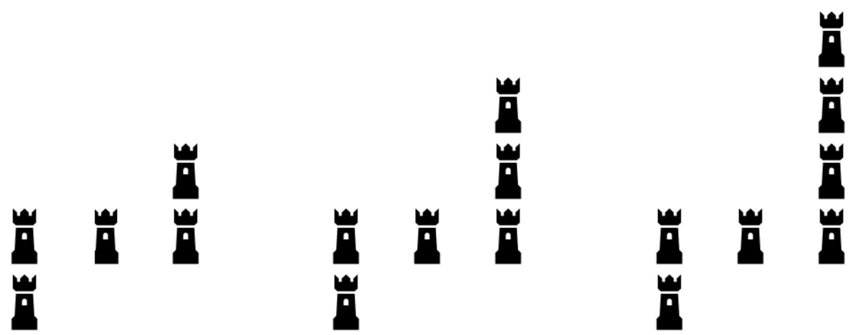


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 …

1.1. Observa a sequência de figuras e responde às questões:

a. O que têm as várias figuras de semelhante?

b. O que têm as várias figuras de diferente?

c. Desenha a quinta figura da sequência.

d. Regista numa tabela o número de castelos das figuras da sequência, desde a figura 1 até à figura 6.

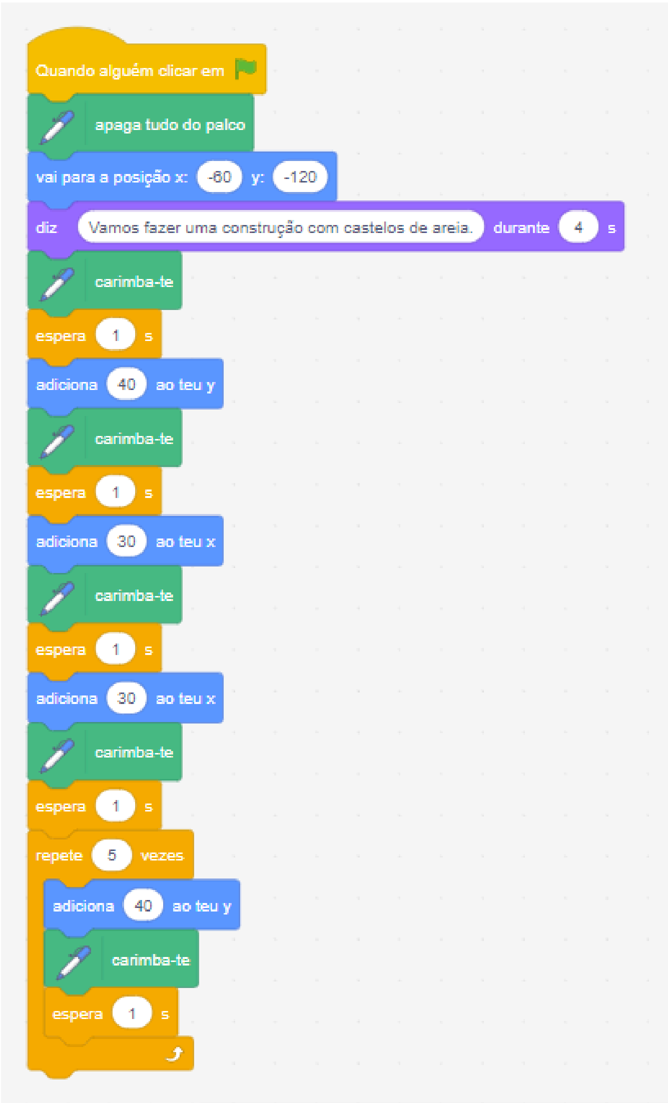
1.2. Qual o número de castelos da 20.ª figura da sequência? Explica a tua resposta.

1.3. Qual o número de castelos da 96.ª figura da sequência? Explica a tua resposta.

1.4. Explica como podes saber o número de castelos de qualquer figura da sequência a partir do seu número de ordem.

2. No dia seguinte, na escola, os dois amigos fizeram um jogo no Scratch para construir uma das figuras da sequência.

a. Constrói o projeto tal como foi feito pelos dois amigos, programando o ator () que te é dado no link https://scratch.mit.edu/projects/778123684.



b. Carrega na bandeira verde e descobre qual a ordem da figura da sequência que foi construída.

c. Altera o projeto para desenhares a figura de ordem 6 e testa-o.

d. Conseguiste obter a figura correta? Se ainda não conseguiste, analisa de novo o projeto e verifica o que pode ter corrido mal e tenta de novo!

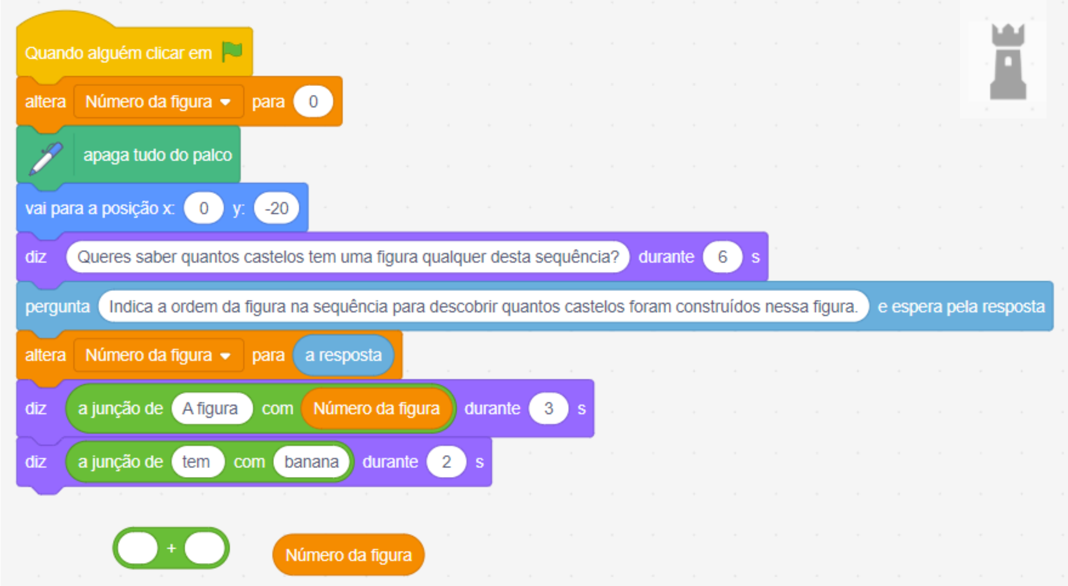
e. Explica o que foi necessário alterar para construir a figura de ordem 6 desta sequência.

3. Os dois amigos iniciaram um novo jogo para descobrir o número de castelos de qualquer figura.

a. Entra no link https://scratch.mit.edu/projects/777854778, carrega na bandeira verde e verifica o que acontece no jogo. Indica se há alguma coisa a mudar?

b. Entra dentro do projeto e analisa a programação. Conclui o projeto para que o jogo indique o número de castelos de qualquer figura da sequência.

Na figura abaixo explica o que fizeste no Scratch.



c. Testa o jogo para a figura de ordem 96. O jogo funcionou corretamente? Há alguma coisa que seja necessário corrigir no programa?

d. Testa agora o jogo para a figura de uma ordem qualquer à tua escolha. O jogo funcionou corretamente? Há alguma coisa que seja necessário corrigir no programa?

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Álgebra Regularidades em sequências	Sequências de crescimento
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio Matemático	Conjeturar e generalizar
	Pensamento Computacional	Abstração Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Representações matemáticas	Conexões entre representações Linguagem simbólica matemática
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Autorregulação Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Formular conjeturas sobre a estrutura de uma sequência de crescimento e testar essas conjeturas, explicando o raciocínio usado
- Identificar e descrever regularidades em sequências de crescimento, explicando as suas ideias.
- Continuar uma sequência de crescimento respeitando uma regra de formação dada ou regularidades identificadas.
- Estabelecer a correspondência entre a ordem do termo de uma sequência e o termo.
- Prever um termo não visível de uma sequência pictórica de crescimento e justificar a previsão.
- Descrever em linguagem natural a regra de formação de uma sequência de crescimento, explicando as suas ideias.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.

- Extrair a informação essencial de um problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes.

- Desenvolver um procedimento passo a passo (algoritmo) para solucionar um problema de modo a que este possa ser implementado em recursos tecnológicos, sem necessariamente o ser.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução apresentada.

- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia.

- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.

- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.

- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador para utilização do Scratch.

Projeto base do Scratch Questão 2 disponível em https://scratch.mit.edu/projects/778123684.

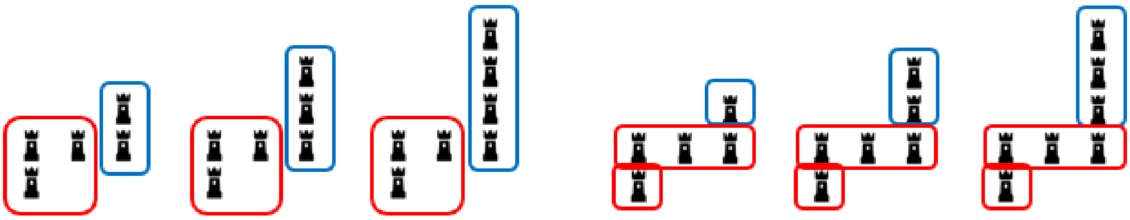
Projeto base do Scratch Questão 3 disponível em https://scratch.mit.edu/projects/777854778.

Exploração da tarefa

Questão 1

Na primeira parte da tarefa os alunos devem realizar trabalho autónomo para a exploração da sequência pictórica de crescimento dada, cujos termos são constituídos por castelos, com a determinação de alguns termos da sequência, próximos e distantes, e da relação direta que permite saber o número de castelos de qualquer figura da sequência, qualquer termo, a partir do seu número de ordem. É importante que após essa primeira parte exista um momento de discussão coletiva para aprofundar a compreensão de todos os alunos sobre a sequência e o estabelecimento de relações. Os alunos podem identificar diferentes relações a partir da representação visual, como mostram dois exemplos na figura 4.

Figura 4. Exemplos de relações na representação visual dos três primeiros termos da sequência



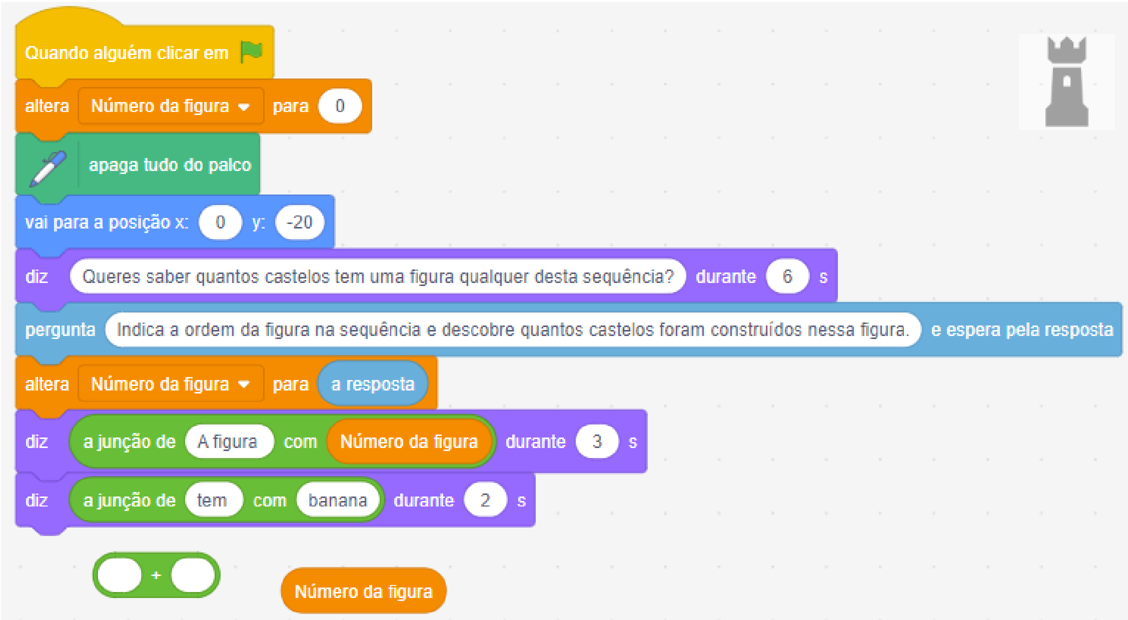
Questão 2

Os alunos são desafiados a reproduzir e a analisar códigos dados num ambiente de programação visual, como sendo o Scratch. O primeiro código dado visa a representação de um termo da sequência. Os alunos reproduzem o código e testam-no para descobrir qual a ordem do termo representado ou se existem erros, como aconteceu com um grupo: "Não saiu certo, porque a figura tinha só duas colunas. O meu colega não me ditou 3 comandos: adiciona 30 ao teu x; carimba-te; espera 1 segundo". O Scratch permite fazer a ligação entre os comandos usados e o que está a acontecer no palco e agir sobre esses comandos para alterar o termo a ser representado. Os alunos têm também de alterar o programa para representar o 6.º termo da sequência, procurando que o analisem e identifiquem o que é necessário alterar para conseguirem que o programa construa o termo, reconhecendo padrões no código relacionados com a estrutura dos termos. Essa análise reforça a relação entre a ordem de um termo da sequência e o termo, verificando o que se mantém inalterado em cada termo e o que altera em cada termo em função da sua ordem na sequência, fomentando a sua capacidade de raciocínio. Quando testam o seu projeto, os alunos conseguem identificar se existem erros e, em caso afirmativo, corrigir e testar novamente. Os alunos conseguem identificar o termo que está a ser representado, como exemplifica a descrição de um aluno: "Foi necessário alterar o bloco do repete para repetir 6 vezes para construir a figura de ordem 6 desta sequência".

Questão 3

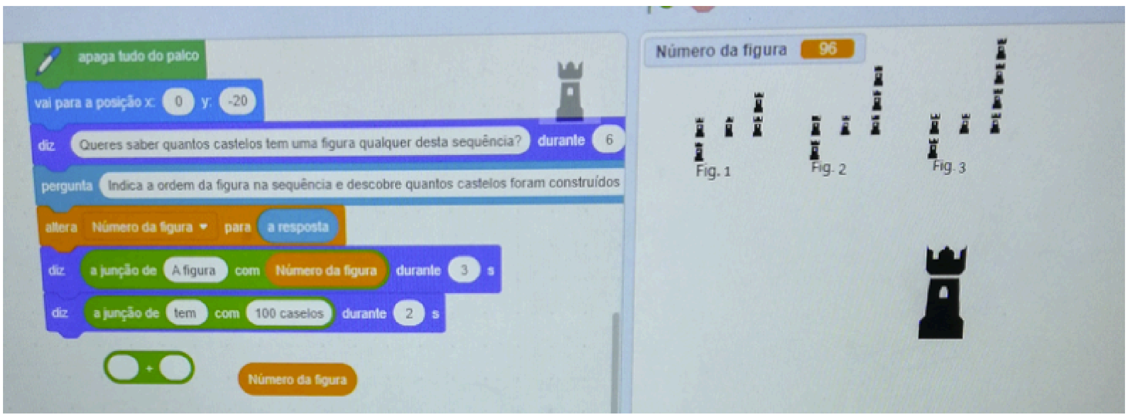
A última parte da tarefa visa a expressão da generalização do número de castelos de qualquer termo da sequência no Scratch, a partir de um projeto do Scratch inacabado (figura 5). Emerge aqui a noção de variável (a ordem) e o pensamento algorítmico. Os alunos têm de conseguir que o projeto indique o número de castelos para qualquer termo da sequência, cujo número da ordem é indicado pelo utilizador. A generalização, a testagem e a depuração desempenham um papel essencial para a compreensão dos alunos.

Figura 5. Projeto Scratch dado para a questão 3



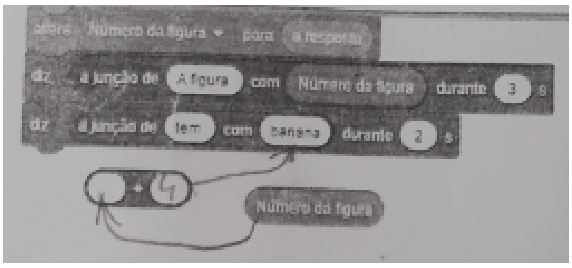
Os alunos dão sentido à variável e à sequência de passos que permite que um utilizador introduza um número, que deve ser natural, maior ou igual a 1, e que o jogo devolva a frase que indica o número da figura que o utilizador introduziu e quantos castelos essa figura tem. Os alunos identificam que essa última parte não se está a concretizar no palco, pelo que é necessário concluir essa parte do projeto. Os alunos podem, numa primeira fase, substituir "banana" pelo número de castelos que sabem que tem o termo que estão a testar, e fazer isso a cada novo teste para que o projeto funcione, como mostra a figura 6.

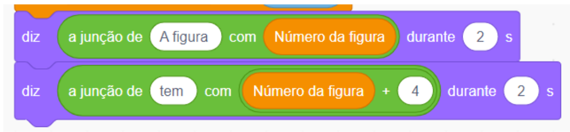
Figura 6. Erro cometido no projeto



É por isso importante discutir com os alunos que o objetivo é que o projeto também funcione quando não se sabe antecipadamente o número da figura, por exemplo, simulando que o código tem de funcionar quando outro colega introduz qualquer número à sua escolha sem o dizer previamente. Os alunos devem assim conseguir perceber a necessidade de introduzir o operador relativo à adição e a variável, como exemplificam os registos do um grupo de alunos, no enunciado e na conclusão do código no Scratch (figura 7):

Figura 7. Registos de um grupo no enunciado e no Scratch sobre conclusão do projeto





Tarefas para o 2.º Ciclo

Nesta secção, destinada ao 2.º Ciclo do Ensino Básico, são apresentados quatro exemplos de tarefas que visam as diversas práticas do pensamento computacional em articulação com diversos temas matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais, como é apresentado em cada uma das tabelas relativas aos conteúdos de aprendizagem. Um aspeto que também é relevante nas tarefas é que procuram apresentar propostas com recurso à tecnologia e sem recurso à tecnologia. Assim, na tarefa Crivo de Eratóstenes é proposto o uso de papel e lápis, na tarefa Sequências numéricas de crescimento é sugerida a utilização do computador e do ambiente de programação por blocos Scratch, na tarefa A corrida é promovida a utilização da folha de cálculo e na tarefa Deci, o robô é fomentado o uso de papel e lápis, tendo também como recurso cartões com algarismos.

Crivo de Eratóstenes

A tarefa Crivo de Eratóstenes enquadra-se nas Aprendizagens Essenciais do 5.º ano de escolaridade, no âmbito do tema Números, no tópico Números naturais e subtópicos Números primos. A tarefa é estruturada com vista à promoção de práticas do pensamento computacional.

Enunciado da tarefa

Tarefa
Crivo de Eratóstenes

1. Escreve a lista de divisores dos números da primeira coluna da tabela e expressa a relação dos divisores com o número, como se exemplifica na terceira coluna da tabela:

Número	Lista de divisores	Relações
10	1, 2, 5, 10	1 x 10 = 10 2 x 5 = 10
13		
24		
36		

2. Vamos descobrir números primos. Para tal, vamos seguir o método de Eratóstenes. Este método é chamado Crivo de Eratóstenes e consiste em eliminar da tabela seguinte os números que não são primos:

2.1. Vamos começar por descobrir todos os números primos até ao número 25.

1	**2**	**3**	**4**	**5**
6	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**

a) O número 1 não é primo, pelo que vai ser eliminado. Faz uma cruz no número 1.

b) O número seguinte, o número 2 é um número primo e por isso vais rodeá-lo. A seguir elimina todos os números múltiplos de 2, fazendo uma cruz sobre esses números. Nota que com isso estão a ser eliminados os múltiplos dos outros números pares. Explica porque é que nenhum desses números eliminados é um número primo.

c) Rodeia o número 3, que é um número primo, e a seguir faz uma cruz em todos os números múltiplos de 3 que ainda não foram eliminados. Também nesta situação, nota que nenhum desses números múltiplos de 3 pode ser primo.

d) Procede do mesmo modo para o menor número ainda disponível, que também é um número primo. Que número é esse? Que números foram eliminados?

e) É necessário fazer o procedimento para mais algum número? Analisa os outros números ainda livres e verifica a necessidade de continuar a adotar o procedimento. Justifica as tuas conclusões.

f) Rodeia todos os números onde não fizeste uma cruz e lista todos os números primos até 25 que encontraste com o método de Eratóstenes. Explica o que caracteriza esses números.

2.2. Agora vamos descobrir todos os números primos até ao número 100. Mais uma vez vamos seguir o método de Eratóstenes. Faz o procedimento até ao menor número necessário de modo a garantir que os números sobre os quais não se coloca uma cruz são todos números primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Descreve todos os passos realizados para descobrir os números primos até 100.

b) Lista todos os números primos até 100 que encontraste com o método de Eratóstenes.

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Números Números naturais	Múltiplos e divisores Números primos
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Processo Estratégia
	Raciocínio Matemático	Conjeturar e generalizar Classificar
	Pensamento Computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia
	Comunicação matemática	Expressão de ideias Discussão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Iniciativa e autonomia Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Reconhecer que um número é divisor de um número diferente de zero quando o resto da divisão inteira do maior pelo menor é zero.
- Identificar múltiplos de um número, divisores de um número e relacionar múltiplos e divisores de um mesmo número.
- Reconhecer que qualquer número diferente de zero é múltiplo e divisor de si próprio e que 1 é divisor de todo o número natural.
- Representar os conjuntos de múltiplos e divisores de um número e reconhecer que há um número finito de divisores de um número e uma infinidade de múltiplos de um número.
- Reconhecer que um múltiplo de um múltiplo de um número é múltiplo desse número e, analogamente, para os divisores, conjeturando e justificando a relação.
- Identificar os números primos menores que 100.
- Reconhecer e aplicar as etapas do processo de resolução de problemas.

- Reconhecer a correção, a diferença e a eficácia de diferentes estratégias da resolução de um problema.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Classificar objetos atendendo às suas características.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões e regularidades no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento (algoritmo) passo a passo para solucionar o problema, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Exploração da tarefa

Questão 1

Os alunos escrevem a lista de divisores de alguns números dados, verificando que o conjunto dos divisores é limitado, que o 1 é divisor de todos os números, que um número é divisor de si próprio, que há números que apenas têm dois divisores e como se relacionam os números que são divisores de um número. Os alunos devem identificar os pares de números, de entre os divisores de um número, cujo produto dá esse número, como exemplifica a tabela 1.

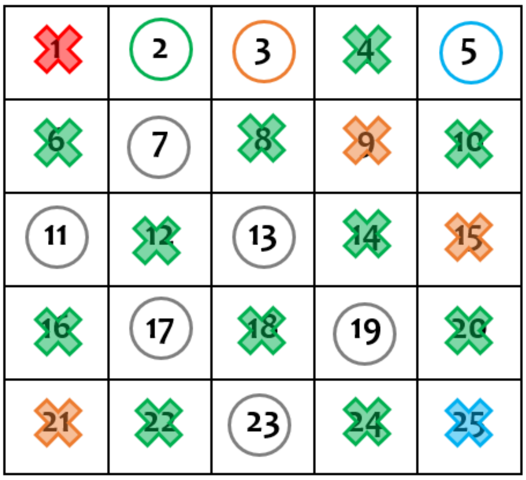
Tabela 1. Exemplo de lista de divisores e relações entre os número

Número	Lista de divisores	Relações
10	1, 2, 5, 10	1 x 10 = 10 2 x 5 = 10
13	1,13	1 x 13 = 13
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	1 x 24 = 24 2 x 12 = 24 3 x 8 = 24 4 x 6 = 24
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	1 x 36 = 36 2 x 18 = 36 3 x 12 = 36 4 x 9 = 36 6 x 6 = 36

Questão 2.1

Os alunos vão encontrar todos os números primos até ao número 25 através do método de Eratóstenes. O método de Eratóstenes dá sentido à prática de decomposição de um problema, uma vez que para determinar os números primos até um dado número começa-se por resolver pequenos problemas, que vão contribuir para a solução do problema inicial. O problema é assim decomposto em problemas menores que respeitam à eliminação de conjuntos de números compostos, primeiro os que são divisíveis por 2, com exceção do próprio 3, ou seja que são múltiplos de 2, maiores que 2, depois os múltiplos de 3, maiores que o próprio 3, e assim sucessivamente, com os números primos sequentes. Pretende-se nesta questão que compreendam até que valor é necessário aplicar o método de Eratóstenes para garantir que são descobertos todos os números primos até um dado número. Esta questão em particular procura os números primos até 25. Para tal devem obter um registo como exemplificado na figura 8.

Figura 8. Crivo de Eratóstenes para números primos até 25



1 não é primo, pelo que se elimina.

2 é primo. Deixa-se o 2 e eliminam-se todos os **múltiplos de 2** seguintes.

3 é primo. Deixa-se o 3 e eliminam-se todos os **múltiplos de 3** seguintes, que ainda não foram eliminados.

5 é primo. Deixa-se o 5 e eliminam-se todos os **múltiplos de 5** seguintes, que ainda não foram eliminados.

Os alunos fazem a eliminação do número 1 e dos múltiplos dos primeiros números primos até ao 5, sem eliminar esses primos, e verificam que não é necessário fazer o procedimento para os números primos seguintes, pois chegaram ao número que multiplicado por ele próprio dá 25. Isto significa que qualquer número seguinte que seja composto já foi eliminado, ou seja, todos têm na sua decomposição em fatores primos os números anteriores e por isso foram eliminados com o método de Eratóstenes. Assim, os números que, depois deste procedimento, não foram eliminados são os números primos até ao número indicado. Conclui-se que os números primos até 25 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Estes números apenas admitem dois divisores naturais, o 1 e o próprio número.

Questão 2.2

A partir das conclusões a que chegaram na questão 2.1, os alunos devem aplicar e descrever o método de Eratóstenes para determinar os números primos até 100, desenvolvendo práticas do pensamento computacional relativas ao reconhecimento de padrões e algoritmia. Este é um contexto que pretende favorecer a comunicação matemática, dando oportunidade aos alunos para descreverem a sua forma de pensar sobre os procedimentos usados, bem como para ouvirem explicações de outros e confrontar os seus procedimentos com os de outros.

Figura 9. Crivo de Eratóstenes para números primos até 100

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1 não é primo, pelo que se elimina.

2 é primo. Deixa-se o 2 e eliminam-se todos os **múltiplos de 2** seguintes.

3 é primo. Deixa-se o 3 e eliminam-se todos os **múltiplos de 3** seguintes, que ainda não foram eliminados.

5 é primo. Eliminam-se todos os **múltiplos de 5** que ainda não foram eliminados.

7 é primo. Eliminam-se todos os **múltiplos de 7** que ainda não foram eliminados.

O processo fica concluído com a realização do procedimento até aos múltiplos de 7, tendo a garantia de que todos os números que não foram eliminados são números primos, uma vez que não se encontra mais nenhum número primo inferior ao número que multiplicado por ele próprio dá 100, ou seja o 10. O método de Eratóstenes permite identificar que os números primos até 100 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Sequências numéricas de crescimento

A tarefa Sequências numéricas de crescimento tem como ponto de partida uma sugestão de tarefa das Aprendizagens Essenciais do 5.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021), remetendo para o desenvolvimento do pensamento computacional de modo articulado com aprendizagens visadas no tema Álgebra, no que respeita ao tópico Relações numéricas e algébricas, e ao subtópico Expressões algébricas com letras. Esta tarefa é também adequada ao trabalho no 6.º ano de escolaridade, contemplando também uma questão específica para o cumprimento dos objetivos de aprendizagem específicos desse ano de escolaridade.

Enunciado da tarefa

Tarefa
Sequências numéricas de crescimento

1. Acede ao projeto do Scratch que indica a lista dos 10 primeiros termos de uma sequência numérica disponível em https://scratch.mit.edu/projects/889183620. Prime a bandeira verde para executar o programa e:
   a) Regista os números da sequência obtida.
   b) Que característica têm os números da sequência?

2. Prime o botão "Ver por dentro". Analisa os comandos utilizados e adapta o programa para indicar os 10 primeiros termos de outra sequência em que o primeiro termo é indicado pelo utilizador, mantendo o valor que se adiciona. Assim, tens incluir no código a pergunta ao utilizador de qualquer que seja o primeiro termo da sequência e usar o valor dessa resposta para criar a sequência.

   2.1. Prime a bandeira verde para executar o programa e:
   a) Regista os números da sequência obtida.
   b) Compara esta sequência com a sequência da questão 1. Encontras alguma relação entre elas? Em que diferem?

   2.2. Prime de novo a bandeira verde e executa o programa, escolhendo outro valor para o 1.º termo. Completa a tabela com as sequências criadas, como se exemplifica para a primeira situação:

Ordem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	***n***
Termos	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	$3n$
Termos											
Termos											
Termos											

   2.3. O que têm todas as sequências em comum? E em que diferem?

3. Faz uma nova adaptação do programa para indicar os 10 primeiros termos de outra sequência de crescimento criada por ti, em que o primeiro termo é indicado pelo utilizador, mas és tu que decides o valor a adicionar.

3.1. Depois de fazeres as alterações necessárias, prime a bandeira verde para executar o programa e completa a tabela com as sequências criadas:

Ordem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	***n***
Termos											
Termos											
Termos											

3.2. O que têm todas as sequências em comum? E em que diferem?

4. Constrói agora programas para obteres cada uma das sequências seguintes:

a) 7; 9; 11; 13; 15; 17; ...

b) 4; 8; 16; 32; 64; 128; …

Para o 6.º ano poderá também ser introduzida a seguinte questão:

5. Acede ao projeto do Scratch que indica a lista dos 10 primeiros termos de uma sequência numérica disponível em https://scratch.mit.edu/projects/1043640716.

5.1. Prime a bandeira verde para executar o programa e:

a) Regista os números da sequência obtida.

b) Que características têm os números da sequência?

c) Indica a expressão algébrica que determina o número do termo de ordem *n*.

5.2. Acrescenta no projeto uma nova situação: "descobrir se um dado número pertence ou não à sequência". Para tal tens de programar o ator para:

- perguntar ao utilizador que número quer saber se pertence ou não à sequência dada (poderá indicar qualquer número racional tendo em atenção que a , do número decimal se representa por um ponto . no Scratch);
- com base no número indicado pelo utilizador (resposta dada pelo utilizador), realizar as operações necessárias para o programa devolver a indicação se esse número faz ou não parte da sequência numérica.

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Álgebra Regularidades em sequências Expressões e relações	 Sequências de crescimento Leis de formação Relações numéricas e algébricas
Capacidades matemáticas transversais	Raciocínio Matemático	Conjeturar e generalizar
	Pensamento computacional	Abstração Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Representações Matemáticas	Representações múltiplas Linguagem simbólica matemática
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Autorregulação Iniciativa e autonomia

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Justificar conjeturas que envolvam relações entre o termo de uma sequência de crescimento, em particular geométrica, e a sua ordem (pensamento funcional) sem necessidade de recorrer ao termo anterior (pensamento recursivo).
- Identificar e descrever em linguagem natural, pictórica e simbólica, uma possível lei de formação para uma sequência de crescimento dada, transitando de forma fluente entre diferentes representações.
- Criar, completar e continuar sequências numéricas dadas de acordo com uma lei de formação e verificar se um dado número é elemento de uma sequência, justificando.
- Criar, completa e continuar sequências dadas de acordo com uma lei de formação e verificar se um dado número é elemento de uma sequência, justificando. (6.º ano)
- Resolver problemas que envolvam regularidades e comparar criticamente diferentes estratégias da resolução.

- Identificar propriedades de elementos de um conjunto ou relações entre os seus elementos, e descrevê-las por palavras, desenhos ou expressões algébricas, apresentando e explicando raciocínios e representações.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Reconhecer ou identificar padrões e regularidades no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento (algoritmo) passo a passo para solucionar o problema, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ler e interpretar ideias e processos matemáticos expressos por representações diversas.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador e acesso ao Scratch.

Acesso ao projeto https://scratch.mit.edu/projects/889183620.

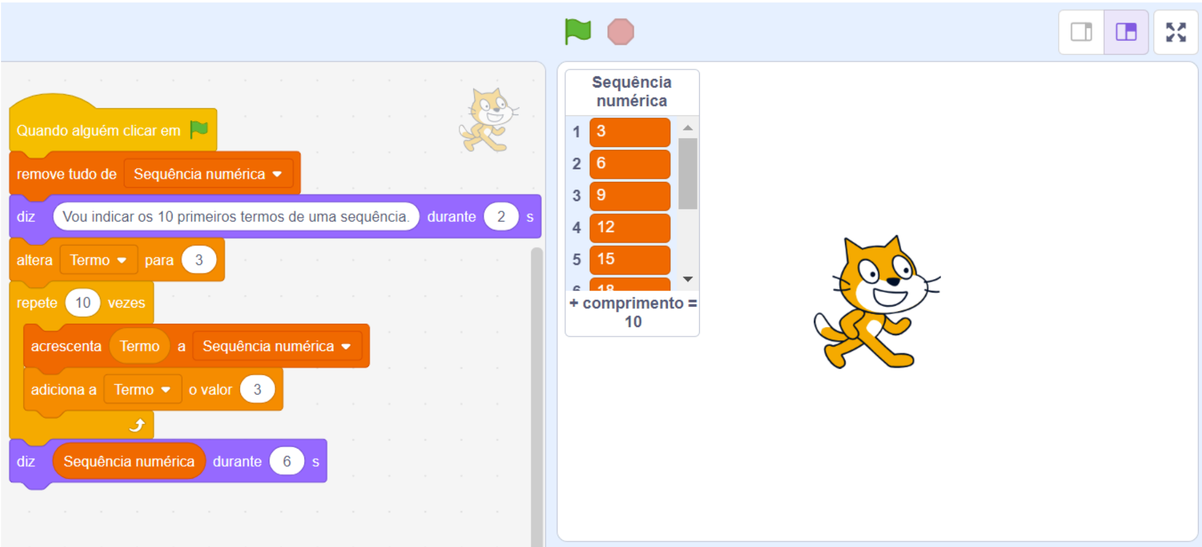
Acesso ao projeto https://scratch.mit.edu/projects/1043640716 (específico para 6.º ano).

Exploração da tarefa

Questão 1

Os alunos vão identificar a sequência criada no ambiente de programação visual, o Scratch, que é dada no *link* https://scratch.mit.edu/projects/889183620,como se mostra na figura 10.

Figura 10. Programação em Scratch para os 10 primeiros termos de uma sequência numérica do crescimento



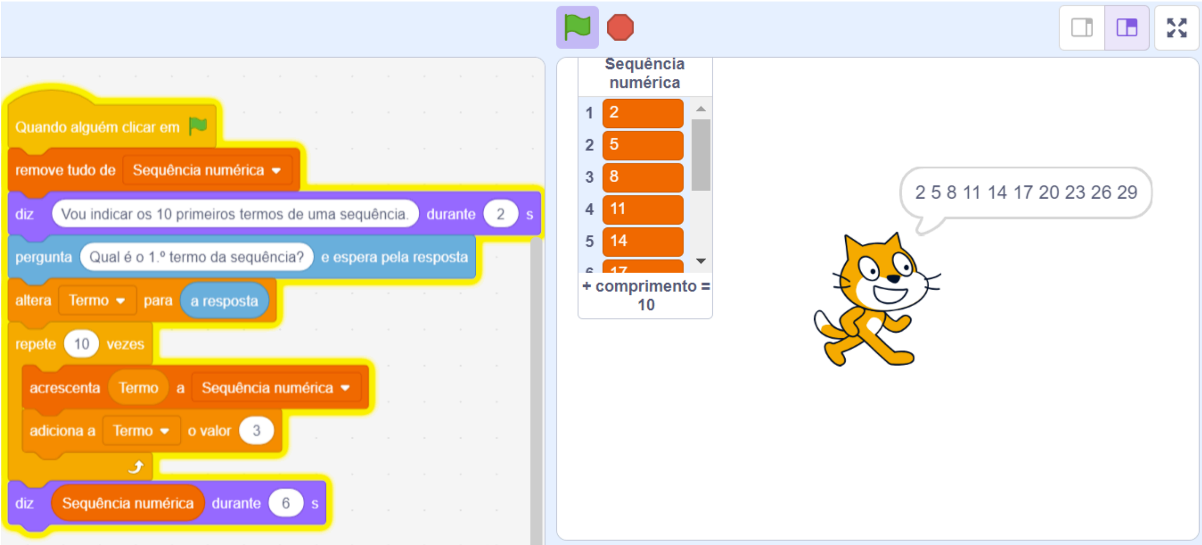
Devem analisar a sequência e chegar a algumas conclusões como as que se exemplificam, identificando propriedades dos números do conjunto ou relações entre eles:

- Os 10 primeiros termos são: 3, 6, 9,12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.
- Os números da sequência são todos múltiplos de 3.
- A diferença entre dois termos consecutivos é 3.

Questão 2

Propõe-se que os alunos obtenham diferentes sequências de números em que difere o 1.º termo, mas se mantém em todas a diferença entre dois termos consecutivos. Os alunos começam por alterar o programa de modo que a sequência criada tenha como primeiro termo um número indicado pelo utilizador. Para tal é necessário incluir uma pergunta e esperar pela resposta do utilizador. O valor introduzido pelo utilizador, a resposta, é usado como 1.º termo da sequência. O programa da figura 11 exemplifica o código que os alunos podem construir.

Figura 11. Programação em Scratch para os 10 primeiros termos de uma sequência numérica do crescimento em que o 1.º termo é dado pelo utilizador



No exemplo da figura 11, o valor introduzido pelo utilizador como 1.º termo foi o 2. Ao identificarem o que é necessário alterar no programa, os alunos estão a reconhecer padrões no programa que cria a primeira sequência para fazerem um outro programa que cria novas sequências.

Os alunos testam o seu programa e devem registar na tabela as sequências criadas com diferentes valores para o 1.º termo, como exemplificam os registos da tabela 8. É também favorecido o raciocínio matemático e o reconhecimento de padrões com a análise das diferentes sequências em que todos os termos são distintos, uma vez que o 1.º termo é diferente, mas em todas as situações a diferença entre termos consecutivos é igual a 3. Os alunos devem formular e testar conjeturas e generalizações a partir das regularidades identificadas. O trabalho com representações múltiplas deve favorecer a compreensão e o raciocínio dos alunos, sendo favorecido o estabelecimento de relações entre as diferentes representações, linguagem verbal, tabela e linguagem algébrica. A expressão algébrica que permite determinar o termo de ordem *n* deve emergir da relação entre os termos e a sua ordem na sequência. A identificação dessa relação pode ser facilitada pela comparação com a primeira sequência. O uso da linguagem simbólica matemática favorece o estabelecimento de relações e permite que o aluno reconheça o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão, como se verifica na tabela 2.

Tabela 2. Registo dos 10 primeiros termos de várias sequências numéricas e da respetiva expressão algébrica, Questão 2

Ordem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	***n***
Termos	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	$3n$
Termos	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	$3n - 1$
Termos	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	$3n + 2$
Termos	2,5	5,5	8,5	11,5	14,5	17,5	20,5	23,5	26,5	29,5	$3n - 0{,}5$

Questão 3

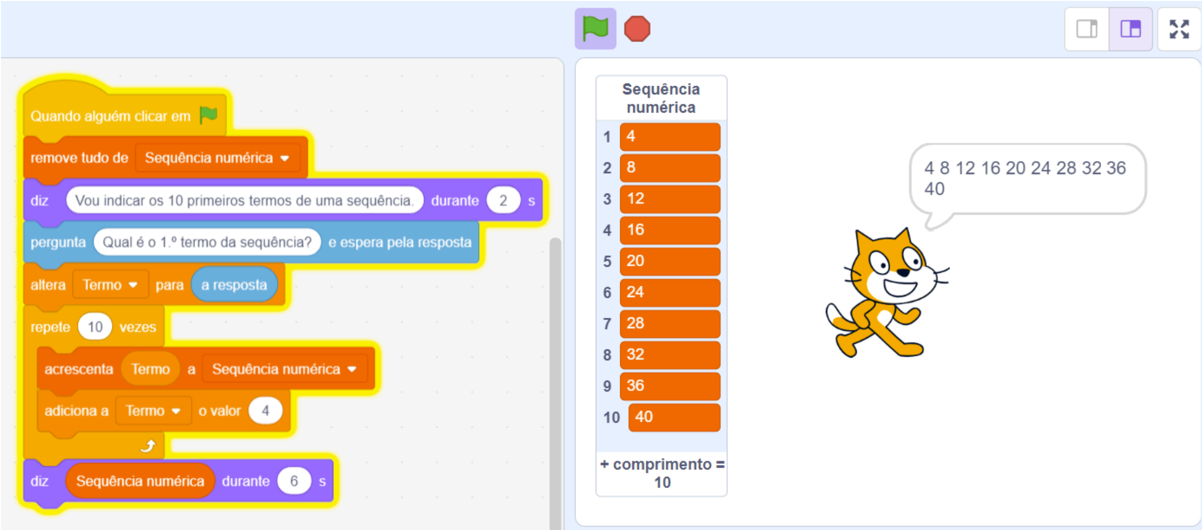
Nesta questão, os alunos realizam uma nova adaptação no programa para que as sequências criadas tenham como primeiro termo o valor indicado pelo utilizador e em que os termos seguintes sejam obtidos adicionando um valor constante, diferente do das questões anteriores (3). A tabela 3 ilustra alguns exemplos de sequências que cumprem o que é solicitado.

Tabela 3. Registo dos 10 primeiros termos de várias sequências numéricas e da respetiva expressão algébrica, Questão 3

Ordem	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	***n***
Termos	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	$5n - 2$
Termos	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	$2n + 3$
Termos	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	$4n$

Os alunos podem, à semelhança do que fizeram nas questões anteriores, reconhecer regularidades, em comparação com as questões anteriormente trabalhadas. Podem identificar relações entre os números e, por exemplo, verificar que para obter números múltiplos de um número é necessário que o 1.º termo seja um múltiplo do número que se adiciona sucessivamente, como mostra a figura 12 que apresenta uma possibilidade de programa.

Figura 12. Programação em Scratch da sequência de números que são múltiplos de 4 e cujo 1.º termo é 4



Questão 4

Nesta questão, os alunos são desafiados a elaborar programas que criem duas sequências dadas, promovendo o seu raciocínio matemático e a capacidade de expressar ideias em diferentes representações. A primeira sequência dada tem um crescimento idêntico ao das questões anteriores, em que a variação é constante, sendo o valor a adicionar entre termos consecutivos constante. A segunda sequência tem um crescimento diferente das anteriores, não sendo sempre adicionado o mesmo valor a um termo para obter o seguinte. Nesta situação, o 1.º termo é 4 e a partir dessa ordem, cada termo é obtido pela multiplicação do termo anterior por 2. A figura 13 apresenta um programa possível para cada uma das situações.

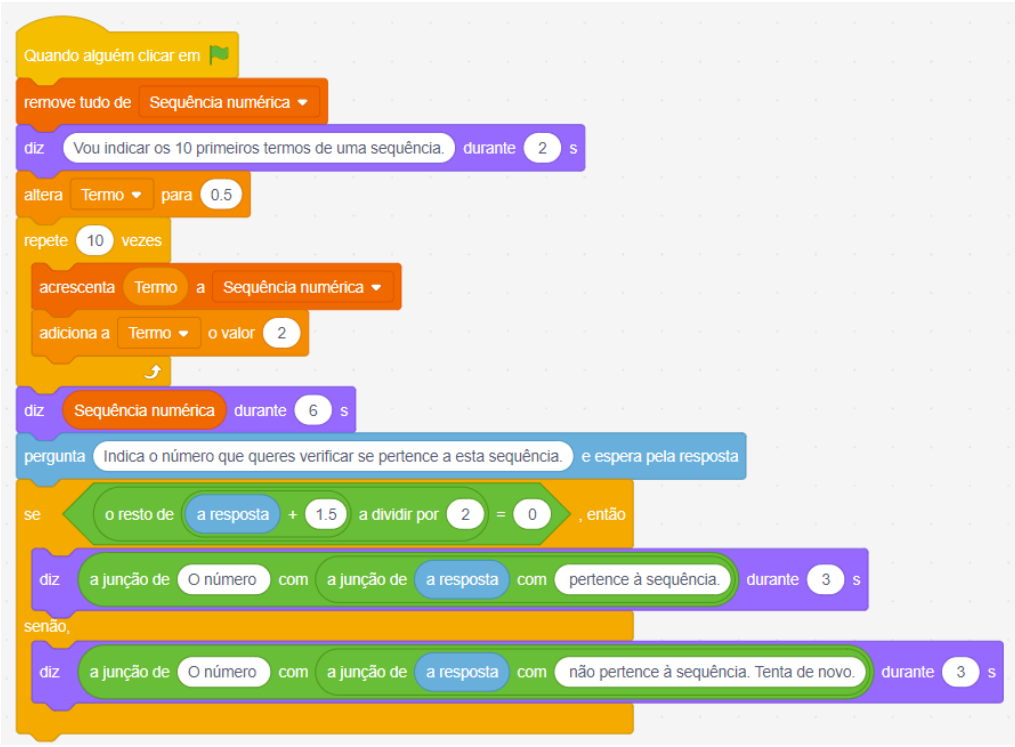
Figura 13. Programação em Scratch de sequências dadas, Questão 4

Questão 5

Esta questão é específica para o 6.º ano de escolaridade e envolve explorar uma sequência numérica de crescimento construída num programa de Scratch dado. Os alunos podem aceder ao projeto em https://scratch.mit.edu/projects/1043640716 e a partir daí acrescentar os blocos necessários para que o programa também verifique se um número que o utilizador pretende testar é ou não termo dessa sequência. A sequência dada tem os 10 termos seguintes: 0,5; 2,5; 4,5; 6,5; 8,5; 10,5; 12,5; 14,5; 16,5; 18,5. Os alunos devem conseguir identificar regularidades e expressar algebricamente a relação que permite determinar o termo de ordem *n*, ou seja, 2*n* - 1,5.

Ao projeto dado, para descobrir se um número introduzido pelo utilizador pertence ou não à sequência, os alunos têm de começar por perguntar ao utilizador que número natural quer saber se pertence ou não à sequência dada e esperar pela resposta. Depois disso, têm de pensar em duas situações, uma em que o número pertence à sequência e tem de ser devolvida essa indicação ao utilizador e outra em que o número não pertence à sequência, tendo também de ser devolvida a indicação de que não pertence ao utilizador. Este contexto promove também o raciocínio matemático, tendo os alunos de pensar que operações devem realizar com o número dado pelo utilizador para ser possível verificar se se trata ou não de um número que pertence à sequência. Assim, têm de programar para realizar as operações inversas às da expressão algébrica, ou seja, subtrair 1,5 ao número dado e depois dividir o resultado obtido por 2. O número pertencerá à sequência se dessa divisão resultar um número natural, que corresponderá à ordem do termo na sequência. Nessa situação, o resto da divisão por 2 deve ser 0. A figura 14 apresenta um programa possível para esta questão.

Figura 14. Programação em Scratch para determinar se um número pertence à sequência, Questão 5



A corrida

A tarefa A corrida é sugerida nas Aprendizagens Essenciais do 5.º ano de escolaridade (Canavarro et al., 2021), remetendo para o desenvolvimento do pensamento computacional de modo articulado com aprendizagens visadas no tema Álgebra, no que respeita ao tópico Relações numéricas e algébricas, e ao subtópico Expressões algébricas com letras.

Enunciado da tarefa

Tarefa
A corrida

Dois amigos fazem uma aposta sobre quem ganhará uma corrida de 180 metros. A Maria está muito confiante e decide dar um avanço ao Pedro, partindo quando este já tinha percorrido 40 metros. Mas como a Maria é mais rápida, a cada 4 metros percorridos pelo Pedro, ela percorre 6 metros.

1. Quem ganhará a corrida?
2. Considerando as condições dadas anteriormente, o que acontecerá se a Maria for um pouco mais lenta? E se o Pedro for mais rápido? E se o avanço for diferente? Constrói uma tabela numa folha de cálculo e faz experiências para poderes concluir sobre a situação.

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

<table>
<tr><th>Conteúdos de aprendizagem</th><th>Tópicos</th><th>Subtópicos</th></tr>
<tr><td>Conteúdos matemáticos</td><td>Álgebra
Relações numéricas e algébricas</td><td>Expressões algébricas com letras</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Capacidades matemáticas transversais</td><td>Raciocínio matemático</td><td>Conjeturar e generalizar</td></tr>
<tr><td>Pensamento Computacional</td><td>Abstração
Decomposição
Reconhecimento de padrões
Depuração</td></tr>
<tr><td>Comunicação matemática</td><td>Expressão de ideias
Discussão de ideias</td></tr>
<tr><td>Representações matemáticas</td><td>Representações múltiplas
Linguagem simbólica matemática</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Capacidades e atitudes gerais transversais</td><td>Pensamento crítico e pensamento criativo</td><td>Pensamento crítico
Criatividade</td></tr>
<tr><td>Relacionamento interpessoal</td><td>Colaboração</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento pessoal e autonomia</td><td>Autoconfiança
Iniciativa e autonomia</td></tr>
</table>

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Exprimir, em linguagem simbólica, relações e propriedades simples descritas em linguagem natural e reciprocamente, ouvindo os outros e discutindo de forma fundamentada.
- Determinar o valor de uma expressão algébrica quando se atribui um valor numérico à letra.
- Resolver problemas que envolvam expressões algébricas, em diversos contextos.
- Formular e testar conjeturas/generalizações, a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo.

- Reconhecer a correção, diferença e adequação de diversas formas de justificar uma conjetura/generalização.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Ouvir os outros, questionar e discutir as ideias de forma fundamentada, e contrapor argumentos.
- Usar representações múltiplas para demonstrar compreensão, raciocinar e exprimir ideias e processos matemáticos, em especial linguagem verbal e diagramas.
- Usar a linguagem simbólica matemática e reconhecer o seu valor para comunicar sinteticamente e com precisão.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Produzir estratégias adequadas pouco habituais na turma.
- Trabalhar com os outros.
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.
- Tomar decisões fundamentadas por argumentos próprios.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador e folha de cálculo.

Exploração da tarefa

São apresentadas, em seguida, duas estratégias que podem emergir na turma durante o trabalho autónomo dos alunos. Se tal acontecer, o professor deve procurar que os grupos que tenham usado uma estratégia ou a outra as apresentem e discutam em coletivo. Essa monitorização do trabalho autónomo vai possibilitar que o professor identifique as diferentes estratégias, selecione os grupos a apresentar as ideias matemáticas do seu trabalho e apoie o estabelecimento de conexões entre diferentes estratégias. Nesse momento de discussão coletiva é importante que os grupos questionem e discutam as ideias apresentadas por outros grupos, confrontando com o seu trabalho e explicitando oralmente as suas ideias matemáticas.

Estratégia 1

Questão 1

Os alunos devem concluir que é a Maria que ganha a corrida. Podem discutir porque é que tal acontece, já que ela começa a corrida quando o Pedro já percorreu 40 metros. Para tal, é importante que identifiquem a informação essencial, decidam o que introduzir na folha de cálculo e como introduzir essa informação, o que requer abstração. Na utilização da folha de cálculo podem começar por definir a distância percorrida num instante zero, que será quando a Maria também iniciar a sua deslocação. Podem introduzir uma fórmula por recorrência que dependa do valor que respeita à deslocação de cada um, bem como ao avanço que é dado ao Pedro. Assim, a cada deslocação do Pedro é possível saber a posição em que ambos se encontram, como mostram as duas tabelas da figura 15 (a primeira com as fórmulas visíveis e a segunda com os valores que se obtêm). Os valores 4 e 6, referentes à deslocação do Pedro e da Maria, respetivamente, podem ser indicados em células e estas serem usadas na fórmula, desde que fixada.

Figura 15. Fórmulas e tabela de valores na folha de cálculo relativas à situação inicial

	E	F	G
1		6	4
2		Maria	Pedro
3		0	40
4		=F3+$F$1	=G3+$G$1
5		=F4+$F$1	=G4+$G$1
6		=F5+$F$1	=G5+$G$1
7		=F6+$F$1	=G6+$G$1
8		=F7+$F$1	=G7+$G$1
9		=F8+$F$1	=G8+$G$1
10		=F9+$F$1	=G9+$G$1
11		=F10+$F$1	=G10+$G$1
12		=F11+$F$1	=G11+$G$1

G4 =G3+$G$1

	E	F	G
1		6	4
2		Maria	Pedro
3		0	40
4		6	44
5		12	48
6		18	52
7		24	56
8		30	60
9		36	64
10		42	68
11		48	72
12		54	76

Para as condições iniciais, na figura 16 é possível observar que há um instante em que ambos se encontram na mesma posição, aos 120 metros, e que a Maria chega em primeiro lugar à meta, vencendo a corrida (alcança os 180 metros quando o Pedro ainda se encontra nos 160 metros).

Figura 16. Análise da etapa final da corrida

21		108	112
22		114	116
23		120	120
24		126	124
25		132	128
26		138	132
27		144	136
28		150	140
29		156	144
30		162	148
31		168	152
32		174	156
33		180	160
34			164
35			168
36			172
37			176
38			180

Nesta fase é importante verificar se as relações estão estabelecidas de modo correto na folha de cálculo. Os alunos devem conseguir usar e interpretar as diversas representações para evidenciar a sua compreensão do problema. Tal mantém-se na questão seguinte em que os alunos vão mudar valores e testar as fórmulas introduzidas, identificando possíveis erros e como os corrigir. Além disso, podem procurar modos mais eficientes de exploração do problema que lhes permitam uma compreensão mais aprofundada.

Questão 2

Após a análise da situação inicial, os alunos têm de definir situações com condições diferentes das iniciais. A folha de cálculo permite que de um modo eficiente e rápido se alterem algumas condições e se analise o efeito dessas alterações no resultado final, como exemplificam duas situações apresentadas na figura 17. Os alunos podem formular e testar conjeturas, procurando estabelecer relações cada vez mais gerais. Os alunos podem fazer estes novos registos em outras colunas para manter a situação inicial disponível para comparação. Para resolverem o problema podem começar por analisar várias possibilidades em que apenas alteram o avanço que é dado, outras em que apenas alteram a velocidade de cada um e outras possibilidades em que alteram ambas as condições, passando por um processo de decomposição do problema para no final conseguirem apresentar uma melhor compreensão da situação e as implicações que cada uma das condições tem no resultado final da corrida. Os valores que testam devem ser orientados para a procura de relações e a sua justificação.

Figura 17. Exemplos de alterações feitas às condições iniciais

Alteração da velocidade da Maria (a cada 4 metros percorridos pelo Pedro, a Maria percorre 5 e o Pedro tem um avanço de 40 metros)

	E	F	G
1		5	4
2		Maria	Pedro
3		0	40
4		5	44
5		10	48
6		15	52
7		20	56
8		25	60
33		150	160
34		155	164
35		160	168
36		165	172
37		170	176
38		175	180
39		180	

Nestas condições a Maria não consegue superar o avanço de 40 metros dado ao Pedro e é o Pedro que ganha a corrida.

Alteração do avanço dado (a cada 4 metros percorridos pelo Pedro, a Maria percorre 6 e o Pedro tem um avanço de 60 metros)

	E	F	G
1		6	4
2		Maria	Pedro
3		0	60
4		6	64
5		12	68
6		18	72
7		24	76
8		30	80
26		138	152
27		144	156
28		150	160
29		156	164
30		162	168
31		168	172
32		174	176
33		180	180

Nestas condições a Maria e o Pedro chegam em simultâneo.

Esta análise de diversas situações alterando condições e antecipando o resultado que se pretende obter reforça a identificação de padrões e regularidades para a resolução do problema.

Estratégia 2

Questão 1. Esta estratégia de análise do problema, que reforça a prática da abstração, envolve considerar uma unidade de tempo, o tempo necessário para que a Maria e o Pedro percorram as distâncias que são indicadas, o que na situação inicial é 6 metros para a Maria e 4 metros para o Pedro. A fórmula na folha de cálculo apresentada na figura 18 relaciona os tempos com o avanço e a deslocação que é feita por cada um, a cada unidade de tempo. Considera-se como momento zero, o instante em que a Maria começa a sua deslocação, sendo que nesse instante o Pedro tem já um avanço de 40 metros. É fomentado o uso de diversas representações para promover a compreensão do problema e a interpretação dos resultados obtidos.

Figura 18. Fórmulas e tabela de valores na folha de cálculo relativas à situação inicial com registo de tempos

	E	F	G	H
1		6	4	40
2	Tempo	Maria	Pedro	Avanço
3	0	=E3*$F$1	=E3*$G$1+$H$1	
4	1	=E4*$F$1	=E4*$G$1+$H$1	
5	2	=E5*$F$1	=E5*$G$1+$H$1	
6	3	=E6*$F$1	=E6*$G$1+$H$1	
7	4	=E7*$F$1	=E7*$G$1+$H$1	
8	5	=E8*$F$1	=E8*$G$1+$H$1	
9	6	=E9*$F$1	=E9*$G$1+$H$1	
10	7	=E10*$F$1	=E10*$G$1+$H$1	
11	8	=E11*$F$1	=E11*$G$1+$H$1	

	E	F	G	H
1		6	4	40
2	Tempo	Maria	Pedro	Avanço
3	0	0	40	
4	1	6	44	
5	2	12	48	
6	3	18	52	
7	4	24	56	
8	5	30	60	
9	6	36	64	
10	7	42	68	
11	8	48	72	

Esta estratégia torna evidentes várias relações que podem ser usadas para tomar decisões que alteram o resultado da corrida. Para as condições iniciais é possível verificar que:

- A Maria e o Pedro encontram-se aos 120 metros, no instante 20, uma vez que:
  Maria: 120 = 20 x 6 | Pedro: 120 = 20 x 4 + 40
- A Maria chega primeiro aos 180 metros, no instante 30, enquanto o Pedro apenas chega a essa marca no instante 35:
  Maria: 180 = 30 x 6 | Pedro: 180 = 35 x 4 + 40
- A diferença de deslocação a cada unidade de tempo é de 2 metros, pelo que a Maria precisa de 20 unidades de tempo (20 x 2) para compensar o avanço de 40 metros do Pedro.

Ainda que não seja solicitado, pode resultar da discussão coletiva, a partir do trabalho dos alunos e com a sua colaboração, a generalização das relações identificadas usando a linguagem simbólica. Podem, para a Maria e para o Pedro, expressar algebricamente a relação entre a posição ocupada (p) e as unidades de tempo decorridas (t):

Maria: $p = t \times 6$ | Pedro: $p = t \times 4 + 40$

Podem agora fazer alterações às condições iniciais, velocidade e avanço, a partir desta compreensão do problema:

Figura 19. Exemplos de alterações feitas às condições iniciais, com base na unidade de tempo

Alteração da velocidade da Maria (a cada 4 metros percorridos pelo Pedro, a Maria percorre 5 e o Pedro tem um avanço de 40 metros)	Alteração do avanço dado (a cada 4 metros percorridos pelo Pedro, a Maria percorre 6 e o Pedro tem um avanço de 60 metros)
- A diferença de deslocação é de 1 metro a cada unidade de tempo, pelo que a Maria não consegue superar o avanço de 40 que dá. O Pedro consegue alcançar os 180 metros no instante 35 e a Maria fica a 5 metros, precisando de mais uma unidade de tempo: Maria: 180 = 36 x 5 Pedro: 180 = 35 x 4 + 40	- A diferença de deslocação é de 2 metros a cada unidade de tempo, pelo que ao fim de 30 unidades de tempo o avanço de 60 metros é alcançado pela Maria. Assim, ambos alcançam os 180 metros no mesmo instante: Maria: 180 = 30 x 6 Pedro: 180 = 30 x 4 + 30 x 2 180 = 30 x 4 + 60

Deci, o robô

A tarefa Deci, o robô foi criada no âmbito da antecipação da operacionalização das Aprendizagens Essenciais do 5.º ano, constando da coletânea de tarefas desse ano de escolaridade (Santos et al., 2022). Enquadra-se assim nas Aprendizagens Essenciais do 5.º ano de escolaridade, remetendo para o desenvolvimento do pensamento computacional de modo articulado no tema Números, no que respeita ao tópico Frações, decimais e percentagens, e ao subtópico Comparação e ordenação, de modo particular com números representados na forma decimal.

Enunciado da tarefa

Tarefa
Deci, o robô

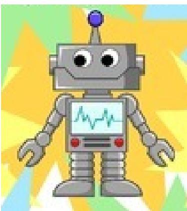
Parte I

8	3	6	,

1. Encontrem, usando os cartões que vos foram distribuídos, números diferentes.

   (Atenção: podem trocar os cartões de lugar, mas têm de usar sempre os quatro na composição de um número).

2. Quantos números diferentes conseguem escrever? Apresentem-os.
3. Expliquem como pensaram para não se esquecerem de nenhum número.



Parte II

O Deci é um robô criado para ordenar e descobrir números. Como todos os robôs, antes de fazer qualquer tarefa tem de ser programado. O Deci, agora, tem cinco cartões e com eles constrói números, como no exemplo:

0	6	,	3	8

1. Vamos pedir ao Deci que, usando todos os cartões azuis, nos diga:

   a. o maior número possível

   b. o menor número possível

2. Expliquem que instruções têm de dar ao Deci para, com outros cinco cartões, quatro com algarismos quaisquer e um com a vírgula, apresente o maior número possível.

(Fonte: Adaptado de Tavares et al. (2019).)

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

<table>
<tr><th>Conteúdos de aprendizagem</th><th>Tópicos</th><th>Subtópicos</th></tr>
<tr><td>Conteúdos matemáticos</td><td>Números
Frações, decimais e percentagens</td><td>Comparação e ordenação</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Capacidades matemáticas transversais</td><td>Pensamento computacional</td><td>Abstração
Decomposição</td></tr>
<tr><td>Comunicação matemática</td><td>Expressão de ideias
Discussão de ideias</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Capacidades e atitudes gerais transversais</td><td>Pensamento crítico e pensamento criativo</td><td>Pensamento crítico</td></tr>
<tr><td>Relacionamento interpessoal</td><td>Colaboração</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento pessoal e autonomia</td><td>Autorregulação
Perseverança</td></tr>
<tr><td>Saber científico, técnico e tecnológico</td><td>Valorização da Matemática</td></tr>
</table>

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Comparar e ordenar decimais e representá-los na reta numérica, comparando criticamente diferentes estratégias da resolução realizadas por si e por outros.
- Extrair informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.
- Analisar e discutir ideias, centrando-se em evidências.
- Trabalhar com os outros.
- Analisar criticamente as resoluções realizadas por si e melhorá-las.
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa.
- Reconhecer a importância da Matemática para a interpretação e intervenção em diversos contextos.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Cartões com algarismos, de 0 a 9, e um cartão com , (vírgula).

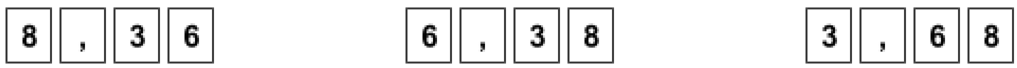
Exploração da tarefa

Parte I

Questão 1

Os alunos dispõem de quatro cartões, três com algarismos diferentes e um com , (vírgula) para formarem diferentes números. Alterando a posição dos cartões, é fácil obter diferentes números e fazer o seu registo no papel. Nesta primeira questão, podem descobrir números de modo pouco estruturado e o total de números obtidos pode ser variável. A figura 20 apresenta alguns números que podem ser formados.

Figura 20. Exemplos de números formados com os quatro cartões



Questões 2 e 3

Os alunos podem começar por fazer uma estimativa do número de números que conseguem formar, indicando por exemplo 10, ou qualquer outro número que lhes pareça razoável, sem terem uma estratégia que oriente essa estimativa. Durante o trabalho autónomo dos alunos, é importante que o professor os incentive a usar um processo organizado para listar todos os números possíveis que se podem compor com os algarismos disponíveis, promovendo as práticas do pensamento computacional. Para apresentarem todos os números podem começar por usar os anteriormente identificados e partir daí para descobrir os restantes ou começar uma nova estratégia para garantir que listam todos os números diferentes que é possível obter.

Os alunos podem decompor o problema e centrar-se em partes do número, podendo emergir ideias como as seguintes:

- fixar um algarismo nas unidades (ou na parte decimal) e alterar a parte decimal (ou as unidades).
- colocar dois algarismos nas unidades, trocando a sua ordem.
- fixar o algarismo das dezenas e alterar o das unidades com o das décimas.

Figura 21. Lista de todos os números possíveis formados com os quatro cartões

8 , 3 6	6 , 3 8	3 , 6 8
8 , 6 3	6 , 8 3	3 , 8 6
8 3 , 6	6 3 , 8	3 6 , 8
8 6 , 3	6 8 , 3	3 8 , 6

Parte II

Questão 1

Cada grupo deverá ter disponível um conjunto de cartões, mas nesta primeira questão irão apenas usar os que são mostrados no enunciado, neste caso:

0 6 , 3 8

O manuseamento dos cartões permite-lhes explorar várias posições para cada algarismo e para a vírgula, pensando em que ordem um algarismo assume maior ou menor grandeza. Na discussão coletiva, os alunos devem ser incentivados a descrever a sua forma de pensar devendo concluir que o maior número e o menor número que é possível compor com os cinco cartões dados são os seguintes:

a) o maior número possível

8 6 3 , 0

b) o menor número possível

0 , 3 6 8

Questão 2

O conjunto de cartões com os vários algarismos deve permitir aos alunos explorar todas as possibilidades que considerem importantes e definir uma estratégia eficiente, não só para a resolução deste problema como para qualquer problema do mesmo tipo. Os alunos podem começar por selecionar quatro algarismos quaisquer e com o cartão da vírgula explorar as suas hipóteses. Podem introduzir alguma característica que para si seja importante testar, como por exemplo, experimentar compor números em que o zero está incluído ou compor números em que o zero não está incluído, percebendo se têm ou não de ajustar a regra que definiram para obterem o maior número possível.

Exemplo de instruções para formar o número, dadas da esquerda para a direita:

- Seleciona o cartão com o maior número e coloca-o em primeiro lugar (na ordem das centenas);
- Seleciona o cartão com o maior número de entre os restantes e coloca-o em segundo lugar (na ordem das dezenas);
- Seleciona o cartão com o maior número de entre os restantes e coloca-o em terceiro lugar (na ordem das unidades);
- Coloca o cartão com a vírgula em quarto lugar;
- Coloca em quinto lugar o cartão com o algarismo que restou.

Os alunos vão identificar aspetos importantes do maior número que conseguem obter com os cartões dados: O número tem uma grandeza na ordem das centenas; o cartão com a vírgula está sempre na quarta posição; o cartão das décimas é o que tem o valor mais baixo; o cartão da ordem das centenas é o que tem o valor mais elevado.

Num momento de discussão coletiva, poderá ser interessante que os alunos dramatizem o robô a executar as instruções, de modo a perceber se estas conduzem ao objetivo pretendido. Por exemplo, podem simular as ações do robô para diferentes conjuntos de quatro cartões com algarismos, que podem tirar de modo aleatório de entre os cartões com o algarismo virado para baixo, dispostos sobre uma mesa. São os alunos que ao analisar os cartões disponíveis e seguindo as instruções dizem o número a escrever. Em seguida são apresentados alguns exemplos de números compostos a partir de um dado conjunto de cartões:

Simulação	Cartões disponíveis	Maior número possível
A	, 1 2 3 0	3 2 1 , 0
B	, 7 1 8 5	8 7 5 , 1
C	, 1 9 5 8	9 8 5 , 1
D	, 4 2 6 9	9 6 4 , 2

Podem, com as várias situações que analisam, consolidar as conclusões a que chegaram. Nas simulações B e C o algarismo das décimas é em ambas o número 1 porque em ambos os conjuntos de cartões esse é o menor valor. Na situação C foi conseguido o maior valor de todos, pois o conjunto de cartões dispunha de um 9 que ocupou a ordem das centenas (o que o conjunto D também tem) e de um 8 que ocupou a ordem das dezenas, enquanto nenhum outro conjunto dispunha de ambos os algarismos (o maior valor a seguir ao 9 no conjunto D é o 6).

O modo de resolver este problema pode ser útil para a resolução de outros desafios, por exemplo com um maior número de cartões, com outro objetivo ou para o cumprimento de condições específicas.

Reforçando o desenvolvimento das capacidades matemáticas e capacidades gerais transversais, um outro exemplo de dramatização que pode ser desafiante para os alunos e que vai permitir evidenciar a sua compreensão do problema e das instruções dadas ao Deci é o seguinte:

- Seguindo as instruções, o Deci representou o maior número possível a partir de cartões dados com algarismos todos diferentes e uma cartão com uma vírgula. Os alunos não conhecem esses cartões e não conhecem o número formado. Gradualmente é mostrado um cartão, da esquerda para a direita, e os alunos dizem que características têm os algarismos dos cartões que estão ainda ocultos, como se exemplifica:

Número construído pelo Deci	Exemplos de questões do professor	Exemplos de respostas dos alunos
6 □ □ □ □	O que podem dizer sobre o cartão das dezenas?	Tem um valor igual a 5 ou menor.
6 3 □ □ □	O que podem dizer sobre os restantes cartões com algarismo?	Todos têm um valor inferior a 3.
6 3 2 □ □	Qual é o cartão que se segue?	É a vírgula.
6 3 2 , □	O que podem dizer sobre o cartão das décimas?	Pode ser o 1 ou o 0.
6 3 2 , 0	O Deci cumpriu as instruções para obter o maior número? Aconteceu como esperavam?	Sim.

Extensão

Uma outra questão que os alunos podem colocar respeita à possibilidade de utilização de algarismos iguais para compor um número e que implicações isso pode ter na instrução que é dada ao robô Deci.

Tarefas para o 3.º Ciclo

Nesta secção, referente ao 3.º Ciclo do Ensino Básico, são apresentados três exemplos de tarefas que visam as diversas práticas do pensamento computacional em articulação com diversos temas matemáticos, capacidades matemáticas transversais e capacidades e atitudes gerais transversais, como é apresentado em cada uma das tabelas relativas aos conteúdos de aprendizagem. Um aspeto prende-se com o recurso diversificado à tecnologia. Assim, na tarefa Como embelezar um jardim é proposto que a sua resolução seja feita com recurso à folha de cálculo, na tarefa Vamos simular lançamentos é sugerida a utilização do computador e do ambiente de programação por blocos Scratch e, por último, na tarefa Vamos construir polígonos estrelados numa primeira fase o trabalho pode ser realizado sem computador, sendo apenas previsto uma abordagem à programação em Scratch para a construção de um caso particular de polígonos estrelados.

Como embelezar um jardim

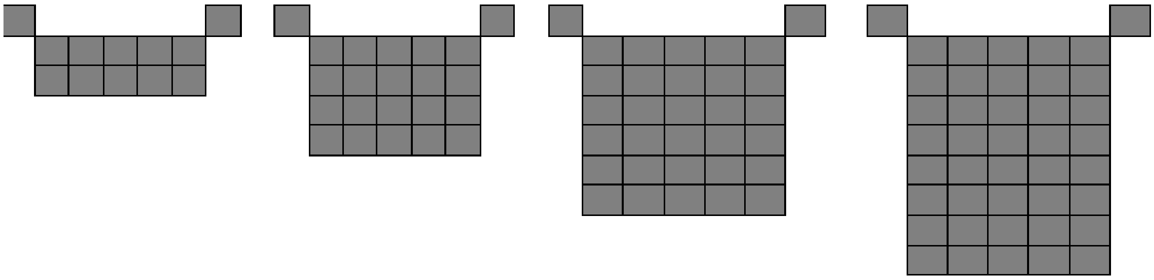
A tarefa Como embelezar um jardim enquadra-se nas Aprendizagens Essenciais do 7.º ano de escolaridade, no âmbito do tema Álgebra, no tópico Regularidades, sequências e sucessões. A tarefa é estruturada com vista à promoção de práticas do pensamento computacional, para além de poder constituir-se como uma boa oportunidade para explorar as representações matemáticas.

Enunciado da tarefa

Tarefa
Como embelezar um jardim (sequências)

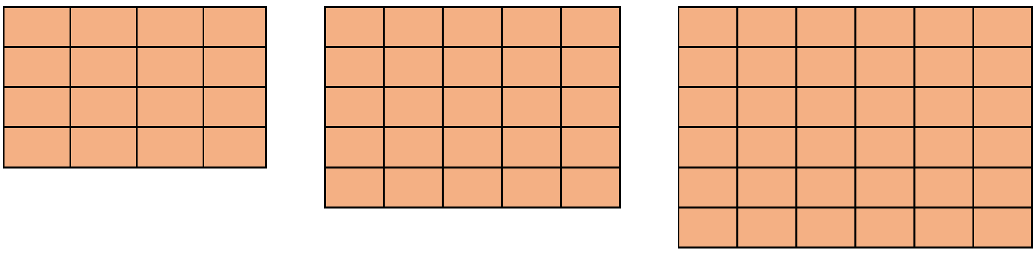
O Tó Zé é jardineiro numa quinta.
Na quinta tem disponíveis duas zonas de cultivo, Jardim A e Jardim B que pretende embelezar.
Com o objetivo de plantar uma espécie diferente em cada quadrícula, optou por, semanalmente, transformar os seus jardins, de acordo com as seguintes sequências:

Jardim A:



semana 1 semana 2 semana 3 semana 4 (...)

Jardim B:



(...) semana 4 semana 5 semana 6 (...)

Resolve as questões seguintes <u>usando a folha de cálculo</u>:

1. Tendo por base o Jardim A, responde:
   - 1.1. Quantas espécies diferentes de plantas terá o jardim na semana 5? E na semana 20?
   - 1.2. Alguma vez o Jardim A poderá ter 512 espécies diferentes de plantas? Justifica.

1.3. Qual poderá ser o termo geral da sequência correspondente ao número de espécies do jardim A?

(A) $n + 10$

(B) $2n + 10$

(C) $10n$

(D) $10n + 2$

Justifica a tua opção.

2. Tendo por base o Jardim B, responde:

2.1. Quantas espécies diferentes de plantas terá o jardim em cada uma das três primeiras semanas?

2.2. Quantas espécies diferentes de plantas terá o jardim na semana 10?

2.3. Alguma vez o jardim poderá ter 512 espécies diferentes de plantas? Explica o teu raciocínio.

2.4. Qual poderá ser o termo geral da sequência correspondente ao número de espécies de espécies diferentes de plantas do jardim B? Explica o teu raciocínio.

3. Considerando os dois jardins:

3.1. Em qual deles seria possível plantar primeiro 65 espécies diferentes de plantas? Explica a tua resposta.

3.2. Em qual deles seria possível plantar primeiro 120? Explica a tua resposta.

3.3. Ao fim de algumas semanas o número de espécies diferentes de plantas num jardim, será o triplo do número de espécies diferentes de plantas do outro. Ao fim de quantas semanas se irá verificar esta relação?

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Regularidades, sequências e sucessões	Lei de formação de uma sequência ou sucessão
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Estratégias
	Pensamento Computacional	Abstração Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Representações matemáticas	Conexões entre representações
Capacidades e atitudes gerais transversais	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Perseverança

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Reconhecer regularidades em sequências ou sucessões de números racionais e determinar uma lei de formação, expressando-a em linguagem natural ou simbólica;
- Determinar termos de uma sequência ou sucessão de ordens variadas, inferior ou superior aos dos termos apresentados, quando conhecida a sua lei de formação;
- Comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência ou sucessão;
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia;
- Extrair a informação essencial de um problema;
- Reconhecer ou identificar padrões e regularidades no processo de resolução de problemas desenvolvendo um algoritmo para o solucionar, recorrendo à tecnologia;

- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução;
- Comparar, interpretar e estabelecer conexões entre representações múltiplas de uma sequência ou sucessão;
- Não desistir prematuramente da resolução da tarefa;
- Reconhecer o valor das suas ideias e processos matemáticos desenvolvidos.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador ou telemóvel com acesso à folha de cálculo.

Exploração da tarefa

A implementação desta tarefa pode ser feita com recurso à folha de cálculo. Para tal, pode-se utilizar computadores ou até mesmo *smartphones*, sendo neste caso aconselhada a utilização da folha de cálculo do Google Drive.

Se esta for a primeira ocasião em que os alunos utilizam a folha de cálculo, é aconselhável que exista um momento prévio à aula para dar a conhecer as funcionalidades necessárias para o desenrolar da mesma, nomeadamente como se introduzir uma fórmula, como copiar a fórmula de uma célula para as outras. Ainda assim, as funcionalidades da folha de cálculo devem ser introduzidas de forma gradual e contextualizada, fazendo com que esta introdução seja mais fácil de assimilar e significativa.

Para a exploração da tarefa os alunos devem estar organizados em pares, podendo estar estes a trabalhar cada um no seu dispositivo, se possível.

Num primeiro momento, o professor deve começar por apresentar a tarefa, explicando a forma como devem fazer uso da folha de cálculo neste contexto específico e como, a partir daí, dar resposta às várias questões apresentadas. As instruções relativas à folha de cálculo não devem passar por facultar as fórmulas a usar, devendo ser os alunos a chegar às mesmas.

No contexto da exploração desta tarefa, o desenvolvimento da abstração consiste na compreensão clara do problema e na identificação da informação inicial no que respeita a cada um dos jardins. Os alunos devem ter em atenção que enquanto no jardim A são dados os quatro primeiros termos da sucessão, no caso do jardim B são dados três termos, mas não são os três primeiros termos, são dados os termos de ordem 4, 5 e 6.

Na automatização do preenchimento da folha de cálculo, no que diz respeito à determinação do número de espécies diferentes de plantas em cada semana, será importante o reconhecimento da lei de formação associada a cada um dos jardins. A identificação da lei de formação revelará o reconhecimento do padrão associado à relação existente, em particular no caso do Jardim A. Os alunos podem reconhecer, de outros problemas, a possibilidade de análise da disposição retangular para identificar relações entre a representação visual dos termos e o número de espécies em cada semana. No Jardim A, podem identificar a colocação fixa de duas espécies e também o crescimento de filas a cada semana. Podem ainda reconhecer duas situações: verificar que esse número de filas, cada uma com cinco espécies, aumenta 2 a cada semana, fazendo aumentar o número de espécies em 10; o número total de espécies na parte retangular da disposição corresponde ao 10 vezes o número da semana que se pretende determinar, podendo fazer a representação simbólica do termo geral, $10n + 2$.

Já no caso do Jardim B, o crescimento não é constante, podendo verificar que da semana 4 para a semana 5, o número de espécies aumenta 9 unidades; da semana 5 para a semana 6, o número de espécies aumenta 11 unidades, e da semana 6 para a semana 7 aumentaria 13 unidades. Para a determinação de termos distantes esta estratégia de recorrência não é tão evidente. Também nesta situação, os alunos podem reconhecer o padrão da disposição retangular e verificar que tanto no comprimento como na largura dessa disposição existem tantas espécies de plantas como o número da semana, chegando assim ao termo geral n^2.

A algoritmia é trabalhada a partir da instrução (fórmula) a introduzir na folha de cálculo que permitirá, através do arrastamento (ou da cópia,caso seja usada a folha de cálculo nos *smartphones*) para as células seguintes. Será crucial o acompanhamento a fazer nesta fase para ajudar os alunos na organização das ideias que permitam chegar à fórmula a usar, sem que esta seja dada diretamente.

Depois de proceder à cópia da fórmula criada, seja esta referente à lei de formação ou baseada no termo geral da sequência, é fundamental incentivar os alunos a analisar os resultados obtidos e a validá-los, de acordo com o que seria de esperar para cada um dos jardins.

Na folha de cálculo, os alunos podem usar diferentes fórmulas e, por arrastamento, obter os termos das ordens indicadas. A figura 22 ilustra duas possíveis fórmulas a utilizar para obter o número de espécies diferentes no Jardim A, a cada semana.

Figura 22. Possíveis fórmulas na sequência Jardim A

Jardim A			Jardim A	
Semanas	Número de espécies		Semanas	Número de espécies
1	=10+2		1	=2+10*D4
2	=B4+10		2	=2+10*D5
3	=B5+10		3	=2+10*D6
4	=B6+10		4	=2+10*D7
5	=B7+10		5	=2+10*D8
6	=B8+10		6	=2+10*D9
7	=B9+10		7	=2+10*D10
8	=B10+10		8	=2+10*D11
9	=B11+10		9	=2+10*D12
10	=B12+10		10	=2+10*D13
11	=B13+10		11	=2+10*D14
12	=B14+10		12	=2+10*D15
13	=B15+10		13	=2+10*D16
14	=B16+10		14	=2+10*D17
15	=B17+10		15	=2+10*D18

Prolongando o número de semanas, os alunos conseguem concluir sobre a existência 512 espécies de plantas em qualquer dos jardins. Por exemplo, para o Jardim B, a figura 23 mostra a listagem de valores em algumas semanas, verificando-se que em nenhuma delas há exatamente 512 espécies diferentes de plantas.

Figura 23. Verificação da não existência de 512 espécies de plantas no Jardim B

20	400
21	441
22	484
23	529
24	576
25	625

A folha de cálculo facilita a comparação do número de espécies diferentes de plantas nos dois jardins de modo a responder às várias questões. A figura 24 coloca lado a lado a sequência de números relativa a cada jardim. A capacidade de abstração é aqui novamente evidenciada, tendo os alunos que conseguir interpretar a informação e extrair os dados relevantes para responder a cada uma das questões.

Figura 24. Verificação da não existência de 512 espécies de plantas no Jardim B

Jardim A			Jardim B	
Semanas	Número de espécies		Semanas	Número de espécies
1	12		1	1
2	22		2	4
3	32		3	9
4	42		4	16
5	52		5	25
6	62		6	36
7	72		7	49
8	82		8	64
9	92		9	81
10	102		10	100
11	112		11	121
12	122		12	144
13	132		13	169
14	142		14	196
15	152		15	225

Vamos simular lançamentos

A tarefa Vamos simular lançamentos enquadra-se nas Aprendizagens Essenciais do 8.º ano de escolaridade, no âmbito do tema Dados, no tópico Probabilidades, subtópico Probabilidade frequencista. Esta é claramente uma tarefa que visa promover o pensamento computacional através das suas cinco práticas. A existência de questões orientadoras tem como principal finalidade dar alguma orientação ao trabalho a realizar pelos alunos.

Enunciado da tarefa

Tarefa
Vamos simular lançamentos

Crie um programa, em Scratch, que simule um determinado número de lançamentos de um dado cúbico (equilibrado) numerado de 1 a 6, e que determine a probabilidade de saída de cada uma das faces, tendo como base a sua frequência relativa.

Questões orientadoras:

1. Quais são as etapas a ter em conta?
2. Como garantir que o número de lançamentos simulados se realiza na sua totalidade, mediante a quantidade introduzida pelo utilizador?
3. Como gerar, associar e armazenar um número aleatório entre 1 e 6?
4. Como determinar a frequência relativa da saída de um número de uma determinada face?

Sugestão:

Poderá usar uma lista para armazenar as frequências relativas da saída de cada uma das faces

Extensão:

Ajuste o seu programa por forma a que as frequências relativas, da saída de cada uma das faces, sejam atualizadas à medida que os lançamentos simulados vão ocorrendo.

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Probabilidades	Probabilidade frequencista
Capacidades matemáticas transversais	Resolução de problemas	Estratégias
	Pensamento computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autorregulação Perseverança
	Saber científico, técnico e tecnológico	Valorização da Matemática

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Estimar a probabilidade de acontecimentos utilizando a frequência relativa.
- Aplicar e adaptar estratégias diversas de resolução de problemas, em diversos contextos, nomeadamente com recurso à tecnologia.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões e regularidades no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento (algoritmo) passo a passo para solucionar o problema, nomeadamente recorrendo à tecnologia.

- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução.
- Descrever a sua forma de pensar acerca de ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador com acesso à Internet

Exploração da tarefa

Esta tarefa deve ser proposta a alunos cujo conhecimento de programação, nomeadamente em Scratch, possa ser considerado médio ou avançado.

Numa fase inicial, após a apresentação da tarefa e do esclarecimento de eventuais dúvidas, o professor deve acompanhar os grupos por forma a garantir que os alunos estão na posse da informação essencial para a resolução do problema. Nesta primeira fase é importante garantir que os alunos conseguem mobilizar informação inicial para delinear uma estratégia de resolução.

As práticas de pensamento computacional serão desenvolvidas de forma não linear, sendo expectável que os alunos mobilizem cada uma das práticas de forma constante. Assim sendo, torna-se importante que o professor que acompanha a implementação da tarefa possa agir de forma intencional por forma a garantir que as práticas serão mobilizadas e desenvolvidas adequadamente. De seguida, será feita uma descrição daquilo que se espera que seja o desenvolvimento em cada uma das práticas do pensamento computacional, devidamente articulada com a resolução da tarefa em causa.

O desenvolvimento da abstração poderá ser intencionalmente reforçado através da criação de oportunidades para que os alunos consigam identificar a informação importante e a forma como esta se irá relacionar. Sempre que necessário, o professor deve reforçar a importância deste procedimento para melhorar a organização da resolução.

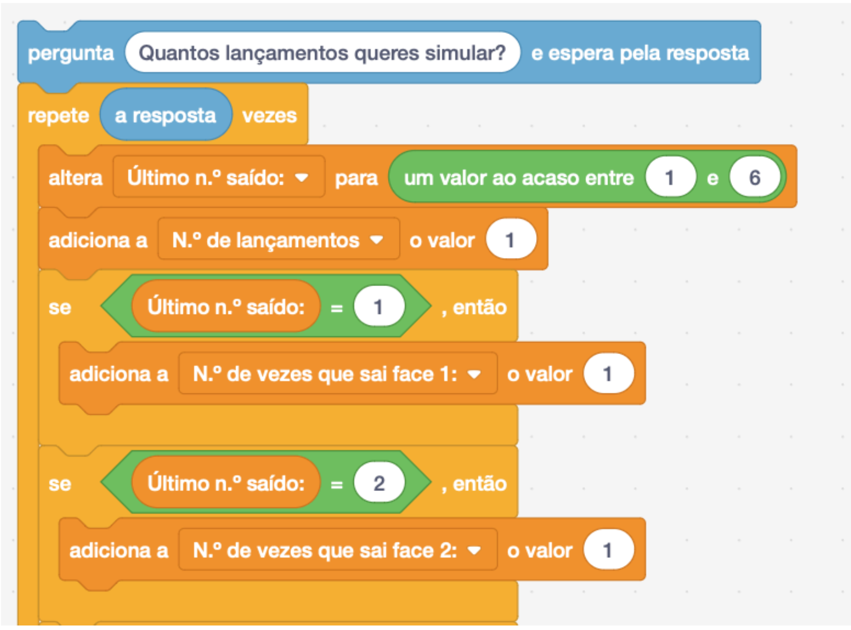
A decomposição deve ser desenvolvida através do incentivo à estruturação do problema em etapas, identificando a sequência das mesmas. Nesta fase, os alunos devem conseguir identificar fases como as seguintes: simular lançamento; gerar n.º aleatório entre 1 e 6; contabilizar essa extração; atualizar a estimativa de probabilidade.

O reconhecimento de padrões deve ser concretizado em diferentes níveis, sendo alguns destes relacionados com as seguintes aspetos: repetição associada ao número de lançamentos que se pretende simular; reconhecimento da saída de cada uma das faces (entre 1 e 6) e a atualização da variável associada que armazena o número de saídas; atualização da probabilidade estimada para a saída de cada uma das faces.

No que diz respeito à algoritmia, é importante que o professor acompanhe a forma como os diferentes grupos efetuou a decomposição do problema em partes e, de forma intencional, conduzir os alunos à criação de uma estrutura de programa que contemple essas etapas devidamente encadeadas. Assim, devem ser tidas em linha de conta as etapas seguintes: gerar n.º aleatório entre 1 e 6; contabilizar essa extração; atualizar a estimativa de probabilidade.

A depuração deve estar presente ao longo da resolução, sendo natural uma constante preocupação com eventuais erros que pode ocorrer. Deste modo, os alunos devem ser incentivados a testar, a procurar e corrigir erros, atendendo aos resultados esperados. Numa fase posterior, o professor deve propor a otimização do programa tendo em vista o seu funcionamento e a uma melhor leitura e compreensão do mesmo.

Figura 25. Ilustração de parte do programa onde se evidencia o padrão



A figura 25 apresenta parte código esperado. Um exemplo do projeto Scratch pretendido poderá ser consultado em: https://scratch.mit.edu/projects/508893185.

Vamos construir polígonos estrelados

A tarefa Vamos construir polígonos estrelados está enquadrada nas Aprendizagens Essenciais do 9.º ano de escolaridade, no âmbito do tema Geometria, no tópico Figuras planas e no subtópico Construções e lugares geométricos. A tarefa está estruturada de forma a trabalhar todas as práticas do pensamento computacional. A forma como é apresentada permite que seja em sala de aula, em tempo útil. Porém, esta temática poderá ser abordada de uma forma mais abrangente, podendo constituir-se como um trabalho de projeto em torno da construção de polígonos estrelados.

Enunciado da tarefa

Tarefa

Vamos construir polígonos estrelados

Um polígono estrelado regular é um polígono em que cada lado cruza pelo menos outro lado, e que tem todos os lados e todos os ângulos iguais.

A partir dos vértices de um polígono regular com 7 lados, constrói um polígono estrelado com recurso ao Geogebra.

a) O que acontece se forem unidos os vértices consecutivos?
b) O que acontece se forem unidos vértices não consecutivos?
c) Quantos polígonos estrelados distintos consegues obter?
d) Qual a amplitude de cada ângulo? Qual a relação entre a amplitude e o número de vértices do polígono?

Possível extensão:

E se o polígono base tiver outro número de lados. O que observas?

Enquadramento curricular

Conteúdos de aprendizagem

Com a resolução desta tarefa procura-se favorecer a aprendizagem dos alunos sobre os conteúdos de aprendizagem apresentados no quadro seguinte:

Conteúdos de aprendizagem	Tópicos	Subtópicos
Conteúdos matemáticos	Figuras planas	Construções e lugares geométricos
Capacidades matemáticas transversais	Pensamento computacional	Abstração Decomposição Reconhecimento de padrões Algoritmia Depuração
	Comunicação matemática	Expressão de ideias
	Representações matemáticas	Conexões entre representações
Capacidades e atitudes gerais transversais	Pensamento crítico e pensamento criativo	Pensamento crítico
	Relacionamento interpessoal	Colaboração
	Desenvolvimento pessoal e autonomia	Autoconfiança Perseverança
	Saber científico, técnico e tecnológico	Valorização da Matemática

Objetivos de aprendizagem

O trabalho em torno desta tarefa procura contribuir para que os alunos progressivamente sejam capazes de:

- Realizar construções em AGD que mobilizem lugares geométricos, polígonos regulares, relações entre ângulos e isometrias, estabelecendo conexões entre diferentes tópicos abordados em geometria plana.
- Extrair a informação essencial de um problema.
- Estruturar a resolução de problemas por etapas de menor complexidade de modo a reduzir a dificuldade do problema.
- Reconhecer ou identificar padrões e regularidades no processo de resolução de problemas e aplicá-los em outros problemas semelhantes.
- Desenvolver um procedimento (algoritmo) passo a passo para solucionar o problema, nomeadamente recorrendo à tecnologia.
- Procurar e corrigir erros, testar, refinar e otimizar uma dada resolução.

- Estabelecer relações e conversões entre diferentes representações relativas às mesmas ideias/processos matemáticos, nomeadamente recorrendo à tecnologia.

Recursos

Enunciado escrito da tarefa para distribuir aos alunos.

Computador com acesso à Internet

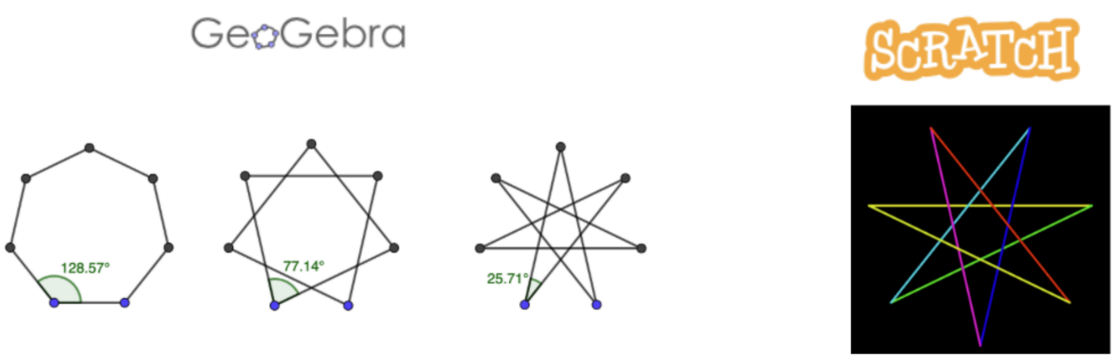
Geogebra

Scratch

Exploração da tarefa

Com esta tarefa pretende-se desenvolver o pensamento computacional através da exploração da possível construção de polígonos estrelados com 7 vértices. Deste modo, pretende-se criar as oportunidades para que os alunos consigam identificar os elementos importantes a partir da definição de polígono estrelado, mais concretamente como devem proceder para ligar os vértices entre si (figura 26).

Figura 26. Ilustração das aplicações a utilizar na resolução da tarefa



O possível recurso ao GeoGebra, como ilustra a figura 26, pode facilitar a construção dos polígonos, tendo como ponto de partida os vértices de um polígono regular. Assim, visa-se desenvolver a abstração, ao selecionar o essencial, a partir da definição de polígono estrelado, e o recurso ao GeoGebra como uma forma de representar os polígonos.

A promoção da estruturação da resolução do problema em etapas, neste caso incentivando a representação dos primeiros lados do polígono, permite facilitar a compreensão do problema e, simultaneamente, desenvolver a prática da decomposição.

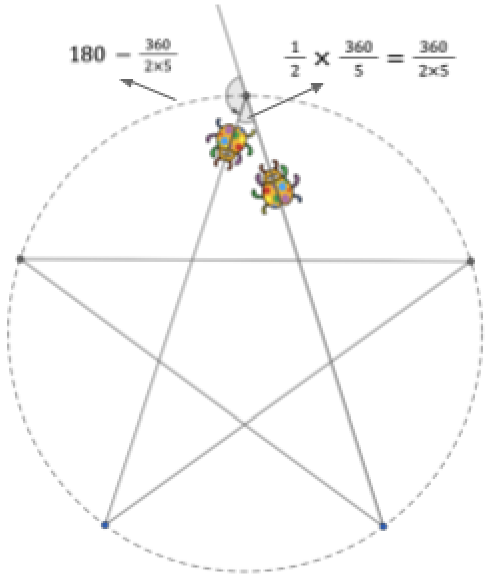
A construção realizada, tendo como base o GeoGebra, pode facilitar a compreensão da existência de padrões na construção de cada polígono estrelado. O professor pode colocar questões que permitam conduzir os alunos ao reconhecimento destes padrões.

Ao solicitar aos alunos o desenvolvimento de um procedimento que permita a construção dos polígonos (para casos particulares) a partir da relação existente entre a amplitude dos ângulos e o número de vértices, o professor está a conduzir os alunos para a obtenção de uma generalização. Para estabelecer esta relação, os alunos devem mobilizar os conhecimentos adquiridos no subtópico anterior relacionado com os ângulos inscritos numa circunferência. A generalização (ilustrada mais à frente numa adaptação da tarefa com recurso ao Scratch) é crucial para que se possa criar um programa para desenhar polígonos estrelados.

Os alunos devem ainda ser incentivados a testar, a procurar e a corrigir erros, atendendo às condições necessárias para a obtenção de um polígono desta natureza. Deste modo, é promovida a identificação e construção de todos os polígonos estrelados, verificando a não existência de construções em duplicado.

Esta tarefa pode ser adaptada para que se possa programar, em Scratch, a construção de um caso particular de polígonos estrelados, como por exemplo, com um número ímpar de vértices. A figura 27 apresenta-nos um pentagrama (polígono estrelado com 5 vértices).

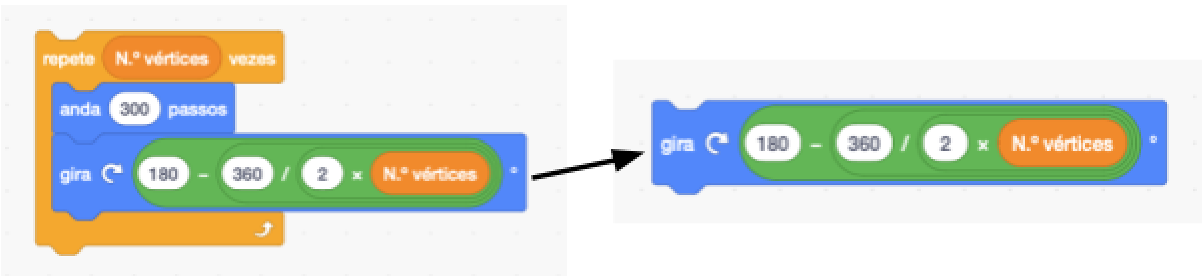
Figura 27. Representação de um pentagrama.



A partir da imagem é possível, para o caso particular do pentagrama, perceber a relação existente entre o número de vértices e a medida de amplitude de cada ângulo interno e, consequentemente, a medida do correspondente ângulo externo (necessário para as instruções na elaboração do programa. Em seguida, na figura 28, estão representados alguns dos comandos necessários para criar o programa em Scratch, onde se destaca o comando que permite operacionalizar a construção do polígono estrelado.

É fácil constatar a relação entre a expressão da medida de amplitude do ângulo externo do pentagrama (figura 27) e a expressão que representa a generalização (figura 28) da medida de amplitude de um qualquer polígono estrelado, para este caso em particular. De reforçar que a construção deste programa em Scratch apenas resulta para polígonos estrelados com um número ímpar de vértices.

Figura 28. Comandos do Scratch utilizados na operacionalização do programa



Para além do caso particular de polígono estrelado apresentado, podem ser alvo de criação de um programa em Scratch outros casos de polígonos estrelados. Assim, sugere-se que a abordagem ilustrada na figura 27, onde se pode observar a relação entre a amplitude do ângulo de rotação com a do ângulo inscrito correspondente, sirva de ponto de partida para a descoberta da fórmula essencial (e necessária) para a generalização da construção dos polígonos pretendidos. Esta extensão ganha significado caso se venha a optar pelo desenvolvimento de um projeto.

Esta tarefa, para além de promover o pensamento computacional, visa desenvolver a capacidade de resolução de problemas e as atitudes gerais transversais tais como pensamento crítico e criativo, desenvolvimento pessoal e autonomia e saber científico, técnico e tecnológico.

Recursos sobre pensamento computacional

Os recursos aqui apresentados, não constituindo uma lista exaustiva, são representativos de projetos e plataformas onde se podem encontrar ideias que poderão ser mobilizadas na elaboração de tarefas exploratórias que visem a aprendizagem de matemática, para além possibilitar o desenvolvimento do pensamento computacional.

Australian Maths Trust — https://www.amt.edu.au/

Bebras — https://bebras.pt/

Blocky Games — https://blockly.games/

Code.org — https://code.org/

Computer Science Education Research Group University of Canterbury — https://csunplugged.org/en/

Mathplayground: Code Builder — https://www.mathplayground.com/code_builder.html (exemplo de jogo)

Scratch — https://scratch.mit.edu/

Snap! — Snap! 9.2.18 (berkeley.edu)

UCL ScratchMaths Curriculum - https://www.ucl.ac.uk/ioe/departments-and-centres/ucl-knowledge-lab/current-research/ucl-scratchmaths/ucl-scratchmaths-curriculum

Referências

Carvalho, R., Espadeiro, R. G., & Branco, N. (2023). *Contributos para o desenvolvimento do pensamento computacional em Matemática: Materiais de apoio para os professores do 1.º ciclo do ensino básico.* Associação de Professores de Matemática https://www.apm.pt/files/files/Ebooks/Materiais%20Profs%201%20Ciclo/Ebook_Materiais_Profs_1_Ciclo.pdf

Canavarro, A.P., Mestre, C., Gomes, D., Santos, E., Santos, L., Brunheira, L., Vicente, M., Gouveia, M. J., Correia, P., Marques, P., & Espadeiro, G. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Básico.* ME-DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica.

Espadeiro, R. G. (2021). O pensamento computacional no currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *162*, 5–10.

Guerreiro, H. G., Vicente, M., Branco, N., & Brito, S. (2023). *Coletânea de tarefas - 4.º ano de escolaridade.* DGE.

Hardin, J. S., & Horton N. J. (2017). Ensuring that mathematics is relevant in a world of data science. *Notices of the American Mathematical Society,* 64(9), 986-990. https://www.ams.org/publications/journals/notices/201709/rnoti-p986.pdf

Hoyles, C., & Noss, R. (2015). *Revisiting programming programming to enhance mathematics learning. Math + coding symposium* (paper presentation). Western University. https://researchideas.ca/coding/proceedings.html

Li, F., Wang, X., He, X., Cheng, L., & Wang, Y. (2022). The effectiveness of unplugged activities and programming exercises in computational thinking education: A meta-analysis. *Education and Information Technologies, 27*, 7993–8013. https://doi.org/10.1007/s10639-022-10915-x

Ng, O., & Cui, Z. (2021). Examining primary students' mathematical problem solving in a programming context: Towards computationally enhanced mathematics education. *ZDM - Mathematics Education, 53*(4), 847–860. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01200-7

Santos, E., Brunheira, L., Martins, I., Serra, S., & Martins, C. (2022). *Coletânea de tarefas — 5.º ano de escolaridade.* DGE.

Sun, L., Hu, L., & Zhou, D. (2022). Single or Combined? A Study on Programming to Promote Junior High School Students' Computational Thinking Skills. *Journal of Educational Computing Research, 60*(2), 283-321. https://doi.org/10.1177/07356331211035

Tavares, D., Pinto, H., Menino, H., Rocha, I., Rainho, N., Rodrigues, M., Cadima, R. & Costa, R. (2019). *Desafios matemáticos. 20 anos de problemas para os primeiros anos*. Escola Superior de Educação e Ciências Sociais do Instituto Politécnico de Leiria.

Wing, J. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35.

Wing, J. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society a: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717–3725.

Ye, H., Liang, B., Ng, O.-L., & Chai, C. S. (2023). Integration of computational thinking in K-12 mathematics education: a systematic review on CT-based mathematics instruction and student learning. *International Journal of STEM Education, 10*(3). https://doi.org/10.1186/s40594-023-00396-w